UNIVERSIDAD CÉSAR VALLEJO
ESCUELA DE POSTGRADO

TESIS

MÓDULO DIDÁCTICO DE ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS DE PRIMER ORDEN PARA MEJORAR LAS CAPACIDADES MATEMÁTICAS EN LOS ESTUDIANTES DE INGENIERÍA CIVIL DE LA UNIVERSIDAD CÉSAR VALLEJO, CHICLAYO - 2014

PARA OBTENER EL GRADO DE

MAESTRO EN EDUCACIÓN

CON MENCIÓN EN DOCENCIA Y GESTIÓN EDUCATIVA

AUTOR:

Br. ANGELA VILMA ALVAREZ DE NIEVES

ASESOR:

Dr. CARLOS CHERRE ANTÓN

LÍNEA DE INVESTIGACIÓN

INNOVACIONES PEDAGÓGICAS

PERU - 2018

DECLARACIÓN JURADA

Yo, Angela Vilma Alvarez de Nieves egresado (a) del Programa de Maestría (x) Doctorado ( ) Maestría en Educación con mención en docencia y gestión educativa de la Universidad César Vallejo SAC. Chiclayo, identificado con DNI N° 16641903

DECLARO BAJO JURAMENTO QUE:

1. Soy autor (a) de la tesis titulada: Módulo didáctico de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden para mejorar las capacidades matemáticas en los estudiantes de ingeniería civil de la Universidad César Vallejo, Chiclayo-2014
2. La misma que presento para optar el grado de: Magíster en Educación con mención en docencia y gestión educativa.
3. La tesis presentada es auténtica, siguiendo un adecuado proceso de investigación, para la cual se han respetado las normas internacionales de citas y referencias para las fuentes consultadas.
4. La tesis presentada no atenta contra derechos de terceros.
5. La tesis no ha sido publicada ni presentada anteriormente para obtener algún grado académico previo o título profesional.
6. Los datos presentados en los resultados son reales, no han sido falsificados, ni duplicados, ni copiados.

Por lo expuesto, mediante la presente asumo frente a LA UNIVERSIDAD cualquier responsabilidad que pudiera derivarse por la autoría, originalidad y veracidad del contenido de la tesis así como por los derechos sobre la obra y/o invención presentada. En consecuencia, me hago responsable frente a LA UNIVERSIDAD y frente a terceros, de cualquier daño que pudiera ocasionar a LA UNIVERSIDAD o a terceros, por el incumplimiento de lo declarado o que pudiera encontrar causa en la tesis presentada, asumiendo todas las cargas pecuniarias que pudieran derivarse de ello. Así mismo, por la presente me comprometo a asumir además todas las cargas pecuniarias que pudieran derivarse para LA UNIVERSIDAD en favor de terceros con motivo de acciones, reclamaciones o conflictos derivados del incumplimiento de lo declarado o las que encontraren causa en el contenido de la tesis.

De identificarse algún tipo de falsificación o que el trabajo de investigación haya sido publicado anteriormente; asumo las consecuencias y sanciones que de mi acción se deriven, sometiéndome a la normatividad vigente de la Universidad César Vallejo S.A.C. Chiclayo; por lo que, LA UNIVERSIDAD podrá suspender el grado y denunciar tal hecho ante las autoridades competentes, ello conforme a la Ley 27444 del Procedimiento Administrativo General.

Chiclayo, marzo del 2018

Angela A. de Nieves

Firma

Nombres y apellidos: Angela Vilma Alvarez de Nieves

DNI: 16641903

DEDICATORIA

A la memoria de mis padres César Alvarez H. y Rosa Campos F.

A la memoria de mi hermana Carmen Lilia.

A mis hermanos Silvia, Rosa, Willy, Luis. A todos ellos con gratitud y amor por el apoyo constante que siempre me brindan.

Angela

A mi querido esposo Nery y mis hijos Heiner Paul, Gueilar Vanessa, Liubov Ivonne, Zeider Martín, quienes con su amor y cariño, fortalecen mi camino y me dan fuerzas para seguir adelante.

Angela

AGRADECIMIENTO

A Dios Todopoderoso por el don de sabiduría que nos concede y nos permite adquirir y transmitir nuevos conocimientos.

A la Dra. Mercedes Collazos Alarcón por su gran motivación y apoyo para llevar adelante este trabajo de investigación.

Al Dr. Carlos Cherre Antón por su invalorable asesoría metodológica en el desarrollo de la presente tesis.

La autora

PRESENTACIÓN

Señores Miembros del Jurado Calificador, de conformidad con lo establecido en el Reglamento de Grados y Títulos de la Universidad César Vallejo, presento a vuestra consideración el informe de investigación titulado: " Módulo didáctico de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden para mejorar las capacidades matemáticas en los estudiantes de Ingeniería Civil de la Universidad César Vallejo, Chiclayo - 2014." con el propósito de obtener el Grado de Magíster en Educación con Mención en Docencia y Gestión Educativa.

El presente informe permite resaltar la importancia del desarrollo de la competencia matemática en la formación académico profesional de los ingenieros civiles de la Facultad de Ingeniería de la Universidad César Vallejo, Chiclayo, a través del mejoramiento de las capacidades matemáticas de matematización, representación, comunicación, elaboración de estrategias, utilización de expresiones simbólicas y argumentación de la secuencia lógica en la resolución de problemas. Su estimulación y desarrollo permitirá a los estudiantes afrontar con éxito situaciones de la vida en los contextos social, académico, profesional y familiar.

En tal sentido esta investigación constituye un aporte para el desarrollo de las capacidades matemáticas en los estudiantes de ingeniería civil, dentro del esfuerzo de formar profesionales competentes y comprometidos con el desarrollo social.

La autora

INDICE

INDICE DE TABLAS

INDICE DE ANEXOS

RESUMEN

La presente tesis tiene como objetivo diseñar y proponer un módulo didáctico de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden para el mejoramiento de las capacidades matemáticas de los estudiantes de Ingeniería Civil de la Universidad César Vallejo, Chiclayo, sustentado en el método de resolución de problemas de George Polya.

La presente investigación es de tipo descriptivo propositivo, porque a partir del diagnóstico de la problemática de las capacidades matemáticas se ha diseñado una propuesta consistente en un Módulo de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden. En concordancia con el tipo de estudio se utilizó un diseño propositivo en el cual se considera la realidad observada, el análisis de la realidad, la propuesta fundamentada en el método de resolución de problemas de George Polya y la realidad que se espera alcanzar, que es mejorar las capacidades matemáticas de los estudiantes de Ingeniería Civil de la Universidad César Vallejo – Chiclayo. Se consideró una población integrada por 80 estudiantes de la Escuela Académico Profesional de Ingeniería Civil y la muestra la conformaron 20 estudiantes de Matemática III de dicha escuela.

Al aplicar el cuestionario a los estudiantes sobre la problemática de las capacidades matemáticas, se concluyó que estos presentaban deficiencias en el desarrollo y aplicación de las capacidades de matematización, representación, comunicación, utilización de estrategias, uso de expresiones simbólicas y en la argumentación en la resolución de problemas matemáticos.

Palabras clave: Módulo didáctico, ecuaciones diferenciales ordinarias, método de Polya, capacidades matemáticas, estrategia didáctica.

ABSTRACT

The aim of this thesis is to design and propose a didactic module of ordinary differential equations of the first order for the improvement of the mathematical abilities of the students of Civil Engineering of the César Vallejo University, Chiclayo, based on the method of solving problems of George Polya

The present investigation is of a descriptive, propositive type, because from the diagnosis of the problematic of the mathematical capacities a proposal has been designed consisting of a Module of ordinary differential equations of the first order. In agreement with the type of study, a propositive design was used in which the reality observed is considered, the analysis of reality, the proposal based on George Polya's problem-solving method and the reality that is expected to be achieved, which is improve the mathematical abilities of the students of Civil Engineering of the César Vallejo University - Chiclayo. A population composed of 80 students of the Professional Academic School of Civil Engineering was considered and the sample was made up of 20 Mathematics III students from that school.

After applying the survey on the mathematical skills problems of the students, it was concluded that they have deficiencies in the development and use of their skills on doing mathematics, representing, communicating, using strategies and symbolic expressions and in arguing when solving mathematical problems.

Keywords: Didactic module, ordinary differential equations, Polya method, mathematical abilities, didactic strategy.

I. INTRODUCCIÓN

1.1. Realidad Problemática

La educación se ha convertido en el pilar fundamental para que las nuevas generaciones adquieran las habilidades sociales así como una cultura básica que les permita enfrentar adecuadamente los retos que encontrarán en el camino hasta llegar a la madurez. Sin embargo, las temáticas y los aprendizajes desarrollados por los sistemas educativos se centran más en el aprendizaje de hechos y datos que en el desarrollo de capacidades que perduren en el tiempo y que brinden al egresado herramientas eficaces para enfrentar con éxito los procesos de cambio que atraviesa el mundo de hoy. Al respecto, el matemático y educador español Miguel de Guzmán (2001), señaló lo siguiente:

> En esta situación de grandes cambios en todos los ámbitos en que nos encontremos, es claro que los procesos verdaderamente eficaces de pensamiento, que no se vuelven obsoletos con tanta rapidez, es lo más valioso que podemos proporcionar a nuestros alumnos. En nuestro mundo científico e intelectual tan rápidamente mutante vale mucho más hacer acopio de procesos de pensamiento útiles que de contenidos que rápidamente se convierten en lo que Whitehead llamó “ideas inertes”, ideas que forman un pesado lastre, que no son capaces de combinarse con otras para formar constelaciones dinámicas, capaces de abordar los problemas del presente. (p.27)

Esta situación implica prestar atención al aprendizaje orientado al desarrollo de competencias y a la consecución de lo que se conoce como “alfabetización matemática” y no sólo a la enseñanza y aprendizaje de contenidos. “Hay que tener en cuenta que los conceptos de competencia, matematización y alfabetización matemática, ponen el énfasis en los resultados del aprendizaje, en lo que el estudiante es capaz de hacer al término del proceso educativo y en los procedimientos que le permitirán continuar aprendiendo de forma independiente a lo largo de su vida” (De Guzmán,2001).

En la última evaluación PISA, “el Perú ocupó el último lugar en razonamiento matemático con un puntaje de 368 puntos sobre una media de 494 puntos, y asimismo en comprensión lectora ocupó el último lugar con 384 puntos sobre una media de 501 (Diario el Comercio, 03 de diciembre del 2013), en tanto que el primer puesto, que es Shanghai - China, alcanzó 613 puntos” (Reynoso, 2011). De estos resultados, se puede afirmar que los estudiantes universitarios están ingresando a la universidad con deficiencias en sus capacidades matemáticas, lo cual se refleja en los actuales estudiantes de la Universidad.

En efecto, en la asignatura de Matemática III desarrollada en el ciclo 2014-I el mayor índice de estudiantes desaprobados se dio en la Unidad I de dicha asignatura referente a Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, siendo el 90.9 % de estudiantes desaprobados (Registro de notas del docente). La didáctica utilizada en el desarrollo del curso fue de acuerdo al silabo que se adjunta en los anexos, usando una metodología activa y trabajos grupales además de los trabajos individuales de desarrollo de ejercicios según hojas de trabajos proporcionadas por el docente.

Teniendo en cuenta este panorama de rendimiento académico en las diversas áreas relacionadas a los números se ha convertido en un problema toda vez que existe un “temor “ por los números, y esto no es ajeno en los estudiantes del curso de matemáticas III de la universidad objeto de investigación, frente a dicha problemática nace la necesidad desde mi labor como docente de aula de innovar a través de recursos didácticos y medios y materiales para “aliviar” la enseñanza de la matemática y no se perciba como difícil para los estudiantes de pregrado.

Por lo antes descrito y conscientes de la problemática de la educación en nuestra región y sobre todo en nuestro país se pretende mejorar la enseñanza a través del módulo didáctico como recurso de enseñanza aprendizaje.

1.2. Trabajos previos

Se ha considerado las siguientes Tesis como trabajos previos de la presente investigación:

Quinteros, (2014) en su tesis “Dificultades que identifican los estudiantes a través de la metacognición en el aprendizaje de las matemáticas en educación secundaria” desarrolla una investigación de tipo cualitativo con estudiantes de la

Institución Educativa Jorge Isaac y logra identificar algunas dificultades en los estudiantes en el aprendizaje de la matemática tales como:

“La falta de práctica, de manera autónoma y dedicada, se presenta en la mayoría de los grados de la secundaria y es un factor primordial para el mejoramiento del desempeño en el trabajo matemático” (Quinteros, 2014)

“La dificultad para recordar y la falta de atención en clase parecen estar fuertemente asociadas al fracaso durante la solución de problemas en contextos matemáticos, en todos los niveles de la secundaria” (Quinteros, 2014)

“No entender el problema es frecuente en casi todos los grados y está comúnmente relacionado con la *falta de análisis* y a su vez con *deficiencias en la comprensión lectora*” (Quinteros, 2014)

“La dificultad en el desarrollo de operaciones básicas, causada por la dependencia extrema a la calculadora, o interpretada como la ausencia de conocimiento matemático, es manifestada constantemente como uno de los principales impedimentos en el camino del estudio matemático” (Quinteros, 2014)

Aredo (2012) en su tesis “Modelo metodológico, en el marco de algunas teorías constructivistas, para la enseñanza – aprendizaje de funciones reales del curso de matemática básica en la facultad de ciencias de la universidad de Piura”, por la naturaleza de la investigación, “ha empleado la metodología de la investigación cualitativa y cuantitativa”, concluyendo que las “estrategias metodológicas participativas constituyen el eje dinamizador del rendimiento académico de los estudiantes, porque desarrolla en ellos niveles de comunicación y participación en un contexto concreto” (Aredo, 2012)

Guerra (2009) en su tesis “La conducción del método Heurístico en la enseñanza de la matemática” usando un grupo experimental y otro de control tanto para pre y post test en estudiantes del Centro Pre Universitario de la Universidad Privada San Juan Bautista, entre otros resultados concluye que “el rendimiento académico en el grupo experimental es “cualitativa y cuantitativamente” superior al grupo de control”.

Zapata y Burga (2014). En su tesis “Aplicación del módulo: “Límites y continuidad de funciones” para mejorar el desarrollo de capacidades en los estudiantes del curso de cálculo I de la Facultad de Ingeniería y Arquitectura de la Universidad de San Martin de Porres Filial Norte Chiclayo 2014.” Realizó un “estudio de tipo cuantitativo – explicativo con un diseño pre experimental aplicado a un grupo único de 21 estudiantes matriculados en el curso de Cálculo I de la Facultad de Ingeniería y Arquitectura de la Universidad de San Martín de Porres” (Zapata & Burga, 2014).

En los resultados del post test de la investigación de Zapata y Burga (2014) en la “capacidad de razonamiento y demostración se logró un 61% en el nivel muy bueno, un 24% en el nivel bueno, un 5% en el nivel regular y un 10% en deficiente”. “En la capacidad comunicación matemática se obtuvo un 10% en el nivel muy bueno y bueno, un 56% regular y 24% deficiente”. Por último, “en la capacidad resolución de problemas el 29% alcanzó el nivel muy bueno, un 24% se ubicó en el nivel bueno, un 5% en el nivel regular y mientras que el 42% se ubicó en el nivel deficiente”.

Los investigadores sostienen que en el post test se aprecia que los estudiantes lograron ubicarse en los niveles muy bueno y bueno, aun cuando existe un gran número de estudiantes en el nivel deficiente.

Vera (2012) en su tesis: “Aplicación de un módulo básico de Matemática Financiera y su efecto en el desarrollo de capacidades del área de matemática en los alumnos de segundo grado de educación secundaria de la institución educativa “Horacio Zevallos Games”- Chiclayo 2012.”, considerada una “investigación aplicativa – explicativa utiliza un diseño cuasi experimental con pre test y post test y con dos grupos, el experimental y el de control, se aplicó a una muestra probabilística de dos secciones de estudiantes de 2° grado de educación secundaria”

“Sostiene que con la aplicación de este módulo se logró el desarrollo de las capacidades del área de Matemática en los alumnos y esto indica que el programa es efectivo y logra desarrollar las capacidades e indicadores establecidos” (Vera, 2012).

1.3. Teorías relacionadas al tema

1.3.1. Definición de Módulo didáctico

Según Calvo (2005), “es un medio instrumental que ayuda o facilita la enseñanza y posibilita la consecución de los objetivos de aprendizaje que se pretenden”.

“El módulo didáctico facilita el logro de los aprendizajes esperados a través de la realización de actividades del estudiante con el apoyo del docente, tanto en el trabajo individual como grupal”. “El objetivo del módulo es desarrollar las capacidades matemáticas del estudiante a través de la resolución de problemas según el método de George Polya”. “Los contenidos están referidos a las definiciones, propiedades y fundamentos teóricos de las ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden” (Calvo, 2005).

Las actividades del módulo deben tener una secuencia lógica que posibilite el desarrollo de las capacidades matemáticas y los criterios de evaluación deben estar claramente definidos.

1.3.2 Fundamentos teóricos del enfoque por competencias

El enfoque por competencias es una alternativa para el diseño y desarrollo del proceso enseñanza-aprendizaje. “Desde la óptica constructivista se considera el desarrollo de competencias como un saber hacer en la práctica, pero motivado en un aprendizaje significativo que se transfiere a situaciones de la vida real y que implica la resolución de problemas”.

Las competencias básicas tienen su origen en el Informe Delors, nombre con el que se conoce el Informe de la UNESCO (1996) titulado “La Educación encierra un tesoro”, que fue prologado por el entonces presidente de la Comisión, Jacques Delors.

El informe establecía cuatro pilares para una educación que pudiera desarrollarse a lo largo de toda la vida. Estos pilares, germen de las competencias básicas recogidas posteriormente en la legislación educativa de muchos países, son.

Aprender a conocer: “Consiste en adquirir una cultura suficientemente amplia y profundizar en los conocimientos de un número reducido de materias. Supone además ser capaz de aprender a aprender, contenido que posteriormente ha sido reforzado por la legislación española al concederle el estatuto de competencia en sí misma” (Delors, 1996).

Aprender a hacer: “Aprender a hacer consiste en adquirir capacidades para hacer frente a un gran número de situaciones y trabajar en equipo” (Delors, 1996).

Aprender a ser: “Aprender a ser consiste en desarrollar la capacidad crítica, la autonomía y el sentido de la responsabilidad, y crear así la propia personalidad” (Delors, 1996).

Aprender a convivir juntos: “Aprender a convivir juntos consiste en desarrollar la comprensión hacia el otro, y la capacidad para realizar proyectos comunes y hacer frente a los conflictos, desde una actitud de respeto” (Delors, 1996).
Los primeros países que utilizaron el concepto de competencias están afiliados a la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (OCDE), es decir, los países que, sin importar su ubicación geográfica, han buscado un crecimiento de su producción y han investigado la forma de lograrlo.

1.3.3 La competencia matemática

De acuerdo a los lineamientos del Ministerio de Educación del Perú (Minedu) (2013), “la competencia matemática promueve el desarrollo de capacidades en los estudiantes, que son necesarias para enfrentar a una situación problemática en la vida diaria”. “De esta manera, la competencia matemática deviene en un saber actuar en un contexto particular, que permite resolver problemas reales o del contexto matemático”.

La resolución de problemas, históricamente, ha sido el motor que ha impulsado el desarrollo de la matemática. “Así tenemos que a inicios de la década de los 80 del siglo pasado, el Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas (NTCM) de los

Estados Unidos de Norte América recomendó que la resolución de problemas sea el principal objetivo de la enseñanza de la matemática en las escuelas".

La resolución de problemas o situaciones problemáticas, es sumamente importante porque nos "permite el desarrollo de capacidades matemáticas que existen de manera integrada y única en cada persona y se desarrollan en el aula y en el entorno, en la medida que tengamos oportunidades y medios para hacerlo".

1.3.4 Las capacidades matemáticas

El Minedu (2013), en su propuesta pedagógica para el aprendizaje de la matemática considera el desarrollo de seis capacidades matemáticas, esenciales para el uso de la matemática en la vida cotidiana, que deben abordarse en todos los niveles y modalidades. Estas seis capacidades son las siguientes:

a) Matematizar: "Significa expresar una parte de la realidad, un contexto concreto o una situación problemática, definida en el mundo real, en términos matemáticos" (Minedu, 2013).

La matemática trata de explorar, según De Guzmán (1996), las estructuras de la realidad que son accesibles mediante ese tipo de manipulación especial que llamamos matematización.
Así, por ejemplo, "la aritmética surge del intento de dominar la multiplicidad presente en la realidad; la geometría de explorar racionalmente la forma y la extensión; el álgebra se ocupa de explorar las estructuras subyacentes a los números y a las operaciones entre ellos; el análisis matemático nació con la intención de explorar las estructuras del cambio y de las transformaciones de las cosas en el tiempo y en el espacio".

b) Representar: "Se refiere a la representación matemática de los objetos". Existen diversas formas de representar las cosas (gráficos, tablas, diagramas, imágenes, etc.) que nos permiten capturar y describir la estructura y las características matemáticas de una determinada situación". Por tanto, existen diversas maneras de organizar el aprendizaje de la matemática. "El aprendizaje de la matemática es un proceso que va de lo concreto a lo abstracto" (Minedu, 2013).

Las ideas básicas, de acuerdo con De Guzmán (1996), nacen de situaciones bien concretas y visuales. "Lo mismo sucede con otras partes aparentemente más abstractas de la matemática". Esta forma de actuar con atención explícita a las posibles representaciones concretas en cuanto develan las relaciones abstractas que al matemático interesan constituye lo que denominamos visualización en matemáticas. "La visualización matemática permite explotar la gran riqueza de contenidos visuales geométricos que tienen las ideas, conceptos y métodos de la matemática, cuya utilización resulta muy provechosa, tanto en tareas de presentación y manejo de tales conceptos y métodos como en la manipulación de ellos para la resolución de los problemas" (Minedu, 2013).

En particular, los pitagóricos primitivos, entre los que se consolidó la matemática como ciencia; el estudio de los números y sus relaciones era realizado a través de configuraciones diversas con piedrecillas. Para ellos lo visual y los procesos de visualización eran algo totalmente connaturales a la matemática.

c) Comunicar: "El lenguaje matemático es también una herramienta que nos permite comunicarnos con los demás, incluyendo distintas formas de expresión y comunicación (oral, escrita, simbólica, gráfica)". (Minedu, 2013) "La gran cantidad de información matemática que se dispone requiere desarrollar en los estudiantes la capacidad de comunicación escrita". Eso les posibilita identificar, procesar, producir y administrar información matemática escrita. A través de la comunicación, sostiene el Consejo Nacional de Profesores de Matemática de los Estados Unidos (NCTM) (2000), las ideas se transforman en objetos de reflexión, perfeccionamiento, discusión y rectificación. Además, los estudiantes aprenden a ser más claros, convincentes y precisos en el uso del lenguaje matemático.

d) Elaborar estrategias: "Al enfrentar una situación problemática de la vida real, lo primero que hacemos es dotarla de una estructura matemática". Luego, seleccionamos una alternativa de solución entre otras opciones. Si no disponemos de ninguna alternativa intentamos crearla. "Entonces, cuando ya disponemos de una alternativa razonable de solución, elaboramos una estrategia". "De esta manera, la resolución de un problema supone la selección o elaboración de una estrategia para guiar el trabajo, interpretar, evaluar y validar su procedimiento y solución matemática. La construcción de conocimientos matemáticos requiere también seleccionar o crear y diseñar estrategias de construcción de conocimientos" (Minedu, 2013).

e) Utilizar expresiones simbólicas: Existen diferentes formas de simbolizar. "Éstas han ido construyendo sistemas simbólicos con características sintácticas, semánticas y funcionales peculiares". "El uso de las expresiones y símbolos matemáticos ayudan a la comprensión de las ideas matemática, sin embargo éstas no son fáciles de generar debido a la complejidad de los procesos de simbolización". "La capacidad de usar símbolos y expresiones simbólicas es indispensable para construir conocimiento y resolver problemas matemáticos. Pero también para comunicar, explicar y entender resultados matemáticos. Recordemos, a través de NCTM (2000), que los símbolos algebraicos y los procedimientos para trabajar con dichos símbolos han sido un gran logro en la historia de las matemáticas y constituyen elementos críticos en el trabajo matemático" (Minedu, 2013).

f) Argumentar: "Esta capacidad es fundamental no solo para el desarrollo del pensamiento matemático, sino para organizar y plantear secuencias, formular conjeturas y corroborarlas, así como establecer conceptos, juicios y razonamientos que den sustento lógico y coherente al procedimiento o solución encontrada" (Minedu, 2013). La argumentación se usa para explicar los procesos de resolución de problemas, justificar las conclusiones o resultados y verificar conjeturas.
El diálogo colectivo basado en afirmaciones u opiniones argumentadas, así como el análisis de la validez de los procesos de resolución de problemas favorecen el aprendizaje matemático.

1.3.5 Método de Polya para resolver problemas.

George Polya fue un matemático que nació en Budapest, Hungría. Dedicó un considerable esfuerzo por caracterizar los métodos generales que usan las personas para resolver problemas y como aprender a resolverlos.

Según Polya (1965) “el método de resolución de problemas consiste en un conjunto de cuatro pasos y preguntas que orientan la búsqueda y la exploración de las alternativas de solución que puede tener un problema”. “Es decir, el plan muestra cómo atacar un problema de manera eficaz y cómo ir aprendiendo con la experiencia”. Citado por (Guerra, 2009).

“La finalidad del método es que la persona examine y remodele sus propios métodos de pensamiento, de forma sistemática, eliminando obstáculos y llegando a establecer hábitos mentales eficaces; lo que Polya denominó pensamiento productivo”.

“Pero seguir estos pasos no garantizará que se llegue a la respuesta correcta del problema, puesto que la resolución de problemas es un proceso complejo y rico que no se limita a seguir instrucciones paso a paso que llevarán a una solución como si fuera un algoritmo. Sin embargo, el usarlos orientará el proceso de solución del problema” Guerra, (2009). Por eso conviene acostumbrarse a proceder de un modo ordenado, siguiendo los cuatro pasos.

En sus estudios, estuvo interesado en el proceso del descubrimiento, o cómo es que se derivan los resultados matemáticos. Advirtió que para entender una teoría, se debe conocer cómo fue descubierta. Por ello, su enseñanza enfatizaba en el proceso de descubrimiento aún más que simplemente desarrollar ejercicios apropiados. A pesar de que su libro How to Solve It (Cómo plantear y resolver problemas) fue escrito en 1945, su pensamiento y su propuesta todavía siguen vigentes.

1.3.6 Fases y preguntas del Plan de Polya.

Teniendo en cuenta el aporte de Polya (1989) se hace necesario comprender las fases de su método, toda vez que es una buena estrategia para la resolución de problemas matemáticos.

Fase 1. Comprensión del problema.

Es tonto el contestar una pregunta que no se comprende. “Para poder resolver un problema primero hay que comprenderlo”. Se debe leer con mucho cuidado y explorar hasta entender las relaciones dadas en la información proporcionada. (Polya, 1989)

Para eso, se puede responder a preguntas como:

- ¿Qué dice el problema? ¿Qué pide?
- ¿Cuál es la incógnita? ¿Cuáles son los datos y las condiciones del problema?
- ¿Es posible hacer una figura, un esquema o un diagrama?
- ¿Es posible estimar la respuesta?

Fase 2. Concepción de un plan.

“En este paso se busca encontrar conexiones entre los datos y la incógnita o lo desconocido, relacionando los datos del problema”. “Se debe elaborar un plan o estrategia para resolver el problema”. “Una estrategia se define como un artificio ingenioso que conduce a un final” Polya (1989). Hay que elegir las operaciones e indicar la secuencia en que se debe realizarlas. Estimar la respuesta. Algunas preguntas que se pueden responder en este paso son:

- “¿Recuerda algún problema parecido a este que pueda ayudarle a resolverlo?”
- “¿Puede enunciar el problema de otro modo? Escoger un lenguaje adecuado, una notación apropiada”.
- “¿Usó todos los datos?, ¿usó todas las condiciones?, ¿ha tomado en cuenta todos los conceptos esenciales incluidos en el problema?”
- “¿Se puede resolver este problema por partes?”
- “Intente organizar los datos en tablas o gráficos”.
- ¿Hay diferentes caminos para resolver este problema?
- ¿Cuál es su plan para resolver el problema?

Fase 3. Ejecución del plan.

“Se ejecuta el plan elaborado resolviendo las operaciones en el orden establecido, verificando paso a paso si los resultados están correctos”. “Se aplican también todas las estrategias pensadas, completando –si se requiere– los diagramas, tablas o gráficos para obtener varias formas de resolver el problema”. Si no se tiene éxito se vuelve a empezar. Suele suceder que un comienzo fresco o una nueva estrategia conducen al éxito.

“El interés debe estar centrado en la habilidad del estudiante en ejecutar el plan trazado y no reducir el proceso de resolución de problemas a simples cálculos” Polya (1989).

Fase 4. Visión retrospectiva.

Mirar hacia atrás o hacer la verificación.

> En el paso de revisión o verificación se hace el análisis de la solución obtenida, no sólo en cuanto a la corrección del resultado sino también con relación a la posibilidad de usar otras estrategias diferentes de la seguida, para llegar a la solución. Se verifica la respuesta en el contexto del problema original. Polya (1989)

“En esta fase también se puede hacer la generalización del problema o la formulación de otros nuevos a partir de él”. Algunas preguntas que se pueden responder en este paso son:

- ¿Su respuesta tiene sentido?

- ¿Está de acuerdo con la información del problema?

- ¿Hay otro modo de resolver el problema?

- ¿Se puede utilizar el resultado o el procedimiento que ha empleado para resolver problemas semejantes?

- ¿Se puede generalizar?

1.3.7 Fundamentos teóricos

A. Teoría del desarrollo cognitivo de Jean Piaget.

Endara (2002), a partir de las investigaciones del psicólogo y epistemólogo suizo Piaget construye una importante aportación para explicar cómo se produce el conocimiento en general y el científico en particular. Marcan el inicio de una concepción constructivista del aprendizaje que se entiende como un proceso de construcción interno, activo e individual. “El desarrollo cognitivo supone la adquisición sucesiva de estructuras mentales cada vez más complejas; dichas estructuras se van adquiriendo evolutivamente en sucesivas fases o estadios, caracterizados cada uno por un determinado nivel de su desarrollo”.

Según Piaget (1975), “en la adolescencia, a partir de los 12 años, se empieza a razonar de manera más abstracta y se pueden utilizar representaciones de la realidad sin manipularla directamente”. Comienza lo que Piaget denomina pensamiento formal.

> Las habilidades intelectuales que caracterizan esta etapa están íntimamente relacionadas con los requerimientos que se exigen para el aprendizaje de las ciencias. Se es capaz de comprobar hipótesis, controlar variables o utilizar el cálculo combinatorio. Esta consideración hizo pensar que el aprendizaje científico sólo era posible si los alumnos habían adquirido el nivel de desarrollo formal. Para Piaget el mecanismo básico de adquisición de conocimientos consiste en un proceso en el que las nuevas informaciones se incorporan a los esquemas o estructuras preexistentes en la mente de las personas, que se modifican y reorganizan según un mecanismo de asimilación y acomodación facilitado por la actividad del alumno. (Piaget, 1975)

Las ideas de Piaget tuvieron gran difusión y se concedió mucha importancia a los estadios, lo que llevó a pensar que el aprendizaje modificaba poco las estructuras cognitivas que lo caracterizaba. “Por otra parte la figura del profesor aparecía desdibujada, al asumir un papel de espectador del desarrollo y facilitador de los procesos de descubrimiento del alumno”

“En el estadio del pensamiento formal, además de las destrezas adquiridas en las etapas anteriores, los estudiantes empiezan a desarrollar el pensamiento lógico: resuelven problemas sencillos y se fascinan con el trabajo experimental, ideando modelos mecánicos para realizar trabajos (prácticas) de tipo científico”.

Tomando en cuenta las ideas de Piaget (1975), "respecto a las nuevas tendencias en la enseñanza de las ciencias, se puede concluir que los aprendizajes en matemática respetan el curso evolutivo del desarrollo del niño". "Por lo tanto, es necesario poner énfasis en los procesos de enseñanza que se emplean para tal propósito".

> Si el niño está cursando los primeros años de enseñanza básica, las actividades tendientes al desarrollo de conceptos se deberán sustentar por la observación inmediata y directa de aquello que se está estudiando, de modo que se produzca una relación entre el objeto, el ser vivo o el fenómeno real y la noción que de él se origina. Cuando se trabaja con niños de quinto y sexto grado de educación básica, una actividad debería consistir en la lectura y análisis de los postulados científicos que constan en los textos especializados. Además, el profesor y ellos mismos deben formular hipótesis, labor que, a su vez, les permitirá ejercitar la capacidad de relacionar y moverse en el plano de lo posible, induciéndolos a comprobar sus planteamientos. (Piaget, 1975)

En resumen y a decir de Piaget (1975), no basta con solo brindar al niño información para generar conocimientos, sino que el estar en constante contacto con los objetos, permitirá tener mejores resultados y aprendizajes más significativos.

B. Teoría humanista de Carl Rogers.

La teoría humanística de Rogers (1969), citado en Williams y Burden, (1997) defiende que para que "el aprendizaje sea significativo se hace necesario que la materia que se enseña sea relevante para el alumno y que el alumno participe activamente en este proceso de aprendizaje". También, cuando los alumnos perciben el aprendizaje como una amenaza para su autoimagen, se puede producir una resistencia a aprender.

> Por tanto, es necesario un clima de seguridad y confianza, en la que el alumno se sienta con la capacidad necesaria para adquirir los nuevos conocimientos. Como veremos más adelante, estas ideas son fundamentales a la hora de determinar los factores que influyen en la motivación. Todas estas primeras teorías psicológicas conciben la motivación como algo incontrolable por parte del sujeto. Acentúan la importancia de impulsos y motivos internos de carácter inconsciente desvalorizando el papel de las intenciones y propósitos conscientes del sujeto en la regulación de su propia conducta. En consecuencia, la motivación que empuja a actuar de una manera u otra escapa del control consciente de la persona que es incapaz, por tanto, de dirigir su conducta. Rogers (1969), citado en Williams y Burden, (1997)

Según Mendoza (2011), “Carl Roger presenta la llamada enseñanza centrada en el estudiante como fruto de sus experiencias como profesor de terapia, y que obedece a los mismos principios de su terapia centrada en el cliente”. La enseñanza centrada en el estudiante está sujeta a una serie de hipótesis y Principios:

- “No se puede enseñar directamente a otra persona”;
- “Sólo se le puede facilitar el aprendizaje”;
- “El estudiante es quien aprende”;
- “El estudiante puede tener dificultades”;
- “El estudiante, sin embargo, puede recibir ayuda”.

Plantea también sobre la facilitación de aprendizaje, considerándonos como un facilitador o maestro tiene la función de crear el ambiente o clima inicial para las experiencias del grupo o la clase, afirma lo siguiente:

- “El facilitador ayuda a identificar y clarificar las expectativas y propósitos individuales así como los objetivos más generales del grupo” (Mendoza, 2011).

- “Confía en que el estudiante desea lograr las metas para él significativas, siendo ésta la fuerza motivacional de trasfondo en todo aprendizaje significativo” Mendoza (2011).

- “Organiza y facilita a los alumnos el más amplio y variado conjunto de recursos que posibiliten su aprendizaje” Mendoza (2011).

- “El facilitador se presenta a sí mismo como un recurso flexible para ser utilizado por el grupo” Mendoza (2011).

- “”Cuando responde a las expresiones e inquietudes del grupo, acepta actitudes de contenido intelectual o emocional y se esmera en darle a cada aspecto la importancia que le atribuyen el grupo o la persona” Mendoza (2011).

- “Conforme se vaya estableciendo un clima de comprensión y libertad, el maestro se va encaminando a llegar a ser un miembro activo del grupo, expresando sus ideas solo como un individuo más” Mendoza (2011).

- “La forma de relacionarse con el grupo es compartiendo sus vivencias y su intelecto sin tratar de imponerlos, sino presentándolos como un aporte más, que bien pueden ser aceptados o rechazados” Mendoza (2011).
- “Durante las clases prestará especial atención a los componentes afectivos que se susciten en el grupo” Mendoza (2011).
- “En su función de facilitador del aprendizaje, el maestro es capaz de reconocer y aceptar sus propias limitaciones” Mendoza (2011).

C. Principios psicopedagógicos

Según el Ministerio de educación (2009) en el diseño curricular nacional, propone los siguientes principios psicopedagógicos:

Principio de construcción de los propios aprendizajes: “El aprendizaje es un proceso de construcción: interno, activo, individual e interactivo con el medio social y natural”. “Los estudiantes, para aprender, utilizan estructuras lógicas que dependen de variables como los aprendizajes adquiridos anteriormente y el contexto socio cultural, geográfico, lingüístico y económico – productivo” (Ministerio de educación, 2009).

Principio de necesidad del desarrollo de la comunicación y el acompañamiento en los aprendizajes: “La interacción entre el estudiante y sus docentes, sus pares y su entorno, se produce, sobre todo, a través del lenguaje; recogiendo los saberes de los demás y aportando ideas y conocimientos propios que le permiten ser consciente de qué y cómo está aprendiendo y, a su vez, desarrollar estrategias para seguir en un continuo aprendizaje”. Este intercambio lo lleva a reorganizar las ideas y le facilita su desarrollo. “Por ello, se han de propiciar interacciones ricas, motivadoras y saludables en las aulas; así como situaciones de aprendizaje adecuadas para facilitar la construcción de los saberes, proponer actividades variadas y graduadas, orientar y conducir las prácticas, promover la reflexión y ayudar a que los estudiantes elaboren sus propias conclusiones, de modo que sean capaces de aprender a aprender y aprender a vivir juntos” (Ministerio de educación, 2009).

Principio de significatividad de los aprendizajes: "El aprendizaje significativo es posible si se relacionan los nuevos conocimientos con los que ya se poseen, pero además si se tienen en cuenta los contextos, la realidad misma, la diversidad en la cual está inmerso el estudiante" (Ministerio de educación, 2009) . Los aprendizajes deben estar interconectados con la vida real y las prácticas sociales de cada cultura. Si el docente logra hacer que el aprendizaje sea significativo para los estudiantes, hará posible el desarrollo de la motivación para aprender y la capacidad para desarrollar nuevos aprendizajes y promover la reflexión sobre la construcción de los mismos.

Principio de organización de los aprendizajes: "Las relaciones que se establecen entre los diferentes conocimientos se amplían a través del tiempo y de la oportunidad de aplicarlos en la vida, lo que permite establecer nuevas relaciones con otros conocimientos y desarrollar la capacidad para evidenciarlas". "Los aprendizajes se dan en los procesos pedagógicos, entendidos como las interacciones en las sesiones de enseñanza y aprendizaje; en estos procesos hay que considerar que tanto el docente como los estudiantes portan en sí la influencia y los condicionamientos de su salud, de su herencia, de su propia historia, de su entorno escolar, sociocultural, ecológico, ambiental y mediático; estos aspectos intervienen en el proceso e inciden en los resultados de aprendizaje, por ello la importancia de considerarlos en la organización de los aprendizajes" (Ministerio de educación, 2009).

Principio de integralidad de los aprendizajes: "Los aprendizajes deben abarcar el desarrollo integral de los estudiantes, de acuerdo con las características individuales de cada persona. Por ello, se debe propiciar la consolidación de las capacidades adquiridas por los estudiantes en su vida cotidiana y el desarrollo de nuevas capacidades a través de todas las áreas del currículo". "En este contexto, es imprescindible también el respeto de los ritmos individuales, estilos de aprendizaje y necesidades educativas especiales de los estudiantes, según sea el caso" (Ministerio de educación, 2009).

Principio de evaluación de los aprendizajes: "La metacognición y la evaluación en sus diferentes formas; sea por el docente, el estudiante u otro agente educativo;

son necesarias para promover la reflexión sobre los propios procesos de enseñanza y aprendizaje. Los estudiantes requieren actividades pedagógicas que les permitan reconocer sus avances y dificultades; acercarse al conocimiento de sí mismos; autoevaluarse analizando sus ritmos, características personales, estilos; aceptarse y superarse permanentemente, para seguir aprendiendo de sus aciertos y errores. Aprenden a ser y aprenden a hacer" (Ministerio de educación, 2009).

1.4. Formulación del problema

¿Cuáles son las principales características y fundamentos que debe tener la propuesta de un módulo didáctico de ecuaciones diferenciales de primer orden que contribuirá a mejorar las capacidades matemáticas en los estudiantes de Ingeniería Civil de la Universidad César Vallejo, Chiclayo?

1.5. Justificación

En el desarrollo de los diferentes campos del saber humano, la matemática y sus aplicaciones son requeridas en las diversas profesiones y las destrezas más requeridas son: el pensamiento matemático, crítico y la resolución de problemas pues con ello, las personas que entienden y que pueden "hacer" Matemática, tienen mayores oportunidades laborales y opciones para decidir sobre su futuro. El tener habilidades y destrezas con criterio de desempeño matemático, facilita el acceso a una gran variedad de carreras profesionales y a varias ocupaciones que pueden resultar muy especializadas. No todas y todos los estudiantes, al término de su educación básica y de bachillerato, desarrollarán las mismas destrezas y gusto por la matemática, sin embargo, todos deben tener las mismas oportunidades y facilidades para aprender conceptos matemáticos significativos, bien entendidos y con la profundidad necesaria para que puedan interactuar equitativamente dentro de su entorno.

Por estas razones, en el presente trabajo de investigación se busca potenciar la competencia matemática de los estudiantes de Ingeniería Civil de la Universidad César Vallejo, mediante la propuesta de un módulo didáctico matemático apoyándose en los enfoques pedagógicos modernos y en el uso sistémico de los diferentes recursos, a fin de que el profesor en su rol de facilitador proporcione los medios y recursos necesarios para que el estudiante logre mejorar sus capacidades matemáticas.

1.6. Hipótesis

Teniendo en cuenta lo planteado por Hernández, Zapata, Mendoza (2013) considera:

> Que no en todas las investigaciones se formulan hipótesis. El hecho de que plantees o no hipótesis depende de un factor esencial: el alcance inicial de tu estudio. Las investigaciones que establecen hipótesis son únicamente aquellas cuyo planteamiento define que su alcance será correlacional o explicativo o las que tienen un alcance descriptivo, pero que intentan pronosticar una cifra, valor o hecho. (p.84)

De acuerdo al tipo de investigación que se plantea en el presente informe, y en relación a lo planteado en el acápite anterior no se ha considerado hipótesis, toda vez que la investigación es de tipo descriptivo - propositivo.

1.7. Objetivos

1.7.1. General

Proponer un módulo didáctico de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden para mejorar las capacidades matemáticas en los estudiantes de Ingeniería Civil de la Universidad César Vallejo, Chiclayo.

1.7.2. Específico

Diagnosticar las capacidades matemáticas de los estudiantes de Ingeniería Civil de la Universidad César Vallejo, Chiclayo.

Diseñar el módulo didáctico de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden para mejorar el nivel de desarrollo de las capacidades matemáticas de los estudiantes de Ingeniería Civil de la Universidad César Vallejo, Chiclayo en base al diagnóstico y a la teoría.

Validar la propuesta del módulo didáctico de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden mediante juicio de expertos.

II. MÉTODO

2.1. Diseño de investigación.

Teniendo en cuenta que "los diseños no experimentales del tipo transversal descriptivo, tienen como propósito describir las variables y analizar su incidencia de manera individual, presentando un panorama del estado de dicha variable o variables e incluso los indicadores en un momento único". "Este tipo de investigación es más natural y cercana a la realidad cotidiana". "En ella se recolectan datos sobre cada una de las dimensiones, conceptos, variables, contextos, comunidades o fenómenos y reportan lo que arrojan esos datos". (Hernández, Fernández y Baptista, 2010).

De acuerdo al párrafo anterior el diseño de investigación que se utilizó es el descriptivo, de corte transversal, "esto quiere decir que no se manipularán las variables, solo se observa el fenómeno tal y como se da en su contexto natural" Sánchez y Reyes (1998, p. 77). "Los datos se realizan en un solo momento, en un tiempo único, realizando un corte específico en un tiempo determinado; es descriptivo por tanto busca precisar, la incidencia del fenómeno en las variables y las relaciones existentes entre sus componentes" (Sánchez & Reyes, 1998, p. 78).

El diagrama que le corresponde se resume en el siguiente esquema:

M --------- O -------------P

Donde:

M: Representa la muestra de la cual se recogió información para el estudio.

O: Representa la información sobre la investigación.

P: Propuesta a la situación estudiada.

Los fundamentos teóricos de la propuesta se basaran en la teoría del desarrollo cognitivo de Jean Piaget, quien sostiene que el mecanismo básico de adquisición de conocimientos consiste en un proceso en el que las nuevas informaciones se incorporan a los esquemas o estructuras preexistentes en la mente de las personas

que se modifica y reorganizan según un mecanismo de asimilación y acomodación facilitado por la actividad del alumno; la teoría humanista de Carl Rogers afirma que para que el aprendizaje sea significativo se hace necesario que la materia que se enseña sea relevante para el alumno y que el alumno participe activamente en este proceso de aprendizaje. Además se apoya en los principios psicopedagógicos propuestos por el MINEDU.
Se usa el enfoque de resolución de problemas para lo cual se aplica el método de George Polya.

2.2 Variables, operacionalización

Módulo didáctico de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de primer orden.

Capacidades matemáticas.

2.2.1 Definición conceptual.

Módulo didáctico de ecuaciones diferenciales ordinarias.

“Es un medio instrumental que ayuda o facilita la enseñanza y posibilita la consecución de los objetivos de aprendizaje que se pretenden” (Calvo, 2006).

Capacidades matemáticas

“Las capacidades son potencialidades inherentes a la persona y que ésta puede desarrollar a lo largo de toda su vida, dando lugar a la determinación de los logros educativos”. “Ellas se cimientan en la interrelación de procesos cognitivos, socio afectivos y motores”. (Zavaleta, 2012)

2.2.2 Definición operacional.

Módulo didáctico de ecuaciones diferenciales ordinarias.

Es la previsión del proceso de enseñanza y aprendizaje basado en la aprehensión de conceptos, procesos intelectuales y adquisición de destrezas para resolver problemas de Ecuaciones diferenciales ordinarias

Capacidades matemáticas

El desarrollo de capacidades es el conjunto de acciones mentales y la construcción de saberes que han adquirido los estudiantes después de aplicar el estímulo.

2.2.3 Operacionalización de las variables

VARIABLE	**DIMENSIONES**	**INDICADORES**	**Ítem/preguntas**
Módulo didáctico de ecuaciones diferenciales de primer orden	Unidad I de matemática III	- Clasifica las ecuaciones diferenciales de primer orden - Resuelve ecuaciones diferenciales de primer orden - Aplica el método de G. Polya	Problemas sobre aplicaciones de las ecuaciones diferenciales de primer orden.
Capacidades en la asignatura de matemática III	- Matematizar - Representar - Comunicar - Elaborar estrategias - Utilizar expresiones simbólicas - Argumentar	- Identifica las variables del problema. - Identifica los datos del problema. - Logra formular el modelo matemático. - Resuelve el modelo matemático	¿Cuál es la variable independiente? ¿Cuál es la variable dependiente? ¿Cuál es la condición inicial? ¿Qué otras condiciones son dadas? ¿Qué tipo de EDO utiliza? ¿Cómo se resuelve esta EDO? ¿La solución satisface la condición inicial? ¿La solución satisface los otros datos?

Fuente: Elaboración propia.

2.3. Población y muestra

Población

La población está integrada por todos los estudiantes (80) de la asignatura de Matemática III, (secciones A, B y C) de la Escuela Académico Profesional de Ingeniería Civil de la Universidad César Vallejo, Chiclayo - 2014.

Muestra.

La muestra estará conformada por 20 estudiantes de la asignatura de Matemática III, sección A, de la Escuela Académico Profesional de Ingeniería Civil de la Universidad César Vallejo, Chiclayo-2014, los mismos que fueron elegidos mediante muestreo no probabilístico a criterio del investigador.

2.4. Técnica e instrumentos de recolección de datos, validez y confiabilidad

2.4.1 Técnicas e instrumentos de recolección de datos

En nuestro estudio se hizo necesario la aplicación de las siguientes técnicas e instrumentos de recolección de información:

Técnicas de gabinete

La aplicación de dicha técnica permitió recopilar información proveniente de diversas fuentes y son:

Ficha de resumen. Tiene como finalidad organizar en forma concisa los conceptos más importantes que aparecen en una o más páginas. Se utilizó esta ficha para sintetizar los contenidos teóricos de las fuentes primarias que servirán como contexto de la presente investigación (Marco teórico)

Fichas textuales. Sirvieron para transcribir literalmente contenidos de la versión original. Lo usamos para consignar aspectos puntuales de la investigación como marco conceptual, principios de la investigación, etc.

Fichas de comentario. Representa el aporte del elector. Es la idea personal que emite el lector de una lectura o experiencia previa. Se empleó para comentar los cuadros estadísticos, antecedentes, etc.

Fichas de registro. Permitió anotar los datos generales de los textos consultados. Se usó para consignar la bibliografía especializada que da sustento a la investigación.

Técnicas de trabajo de campo

Las técnicas de trabajo de campo utilizadas en la presente investigación son la técnica de modelación, la técnica de encuestas, cuyos instrumentos fueron:

La modelación. Basada en la implementación de un módulo didáctico de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden para mejorar las capacidades matemáticas en la asignatura de Matemática III de los estudiantes de Ingeniería Civil de la Universidad César Vallejo, Chiclayo

Técnica de la encuesta. Permitió diagnosticar el nivel de las capacidades matemáticas en la asignatura de Matemática III de los estudiantes de Ingeniería Civil de la Universidad César Vallejo, Chiclayo

2.4.2 Validez y confiabilidad del instrumento de recolección de datos

Al aplicar el coeficiente Alfa de Cronbach para determinar la fiabilidad del instrumento, se logró probar que el instrumento es altamente confiable (0.911).

2.5. Método de análisis de datos

Para el análisis de la información obtenida se hará uso de la estadística descriptiva y para el procesamiento de datos se utilizará el programa Excel de Microsoft Office.

2.6. Aspectos éticos

Para la presente investigación se consideró criterios mínimos como la objetividad, honestidad, respeto de los derechos de terceros, asimismo como se respetaron las autorías de los autores, citando cada una de las fuentes. Además se considera la coherencia en el desarrollo de las fases del proceso investigativo consolidando la objetividad en la calidad de la investigación, asimismo el respeto a las personas involucradas producto de la recogida de los datos dentro de la institución.

Por otro lado, los resultados son manejados de forma prudencial con la seguridad y bienestar de las personas o grupos involucrados en la investigación.

III.RESULTADOS

Cuestionario a los estudiantes de la Escuela Académico Profesional de Ingeniería Civil de la Universidad César Vallejo, Chiclayo.

Participaron en el presente estudio 20 estudiantes, del curso de Matemática III, de la Escuela Académico Profesional de Ingeniería Civil de la Universidad César Vallejo, Chiclayo.

El cuestionario aplicado fue de 22 ítems que fue elaborado por la tesista para evaluar la problemática de las seis capacidades: Matematizar, representar, comunicar, elaborar estrategias, utilizar expresiones simbólicas y argumentar en el contexto de la resolución de problemas

Los datos obtenidos como producto de la aplicación del cuestionario fueron agrupados, de acuerdo a las capacidades a diagnosticar, como sigue:
Capacidad Matematizar: ítems 1, 2, 3, 4
Capacidad Representar: ítems 5, 6, 7
Capacidad Comunicar: ítems 8, 9, 10, 11
Capacidad Elaborar estrategias: ítems 12, 13, 14
Capacidad Utilizar expresiones simbólicas: ítems 15, 16, 17, 18, 19
Capacidad Argumentar: ítems 20, 21, 22

Análisis e interpretación de resultados

Tabla 1. Identifica, correctamente, la o las variables presentes en un problema

	Frecuencia	Porcentaje
Siempre	7	35%
A veces	8	40%
Nunca	5	25%
Total	20	100%

Fuente: Evaluación a estudiantes 2014

Interpretación

Se observa que solamente el 35% (7) de estudiantes identifican correctamente las variables, mientras que un 25% (5) de estudiantes nunca pueden realizar dicha identificación. La mayoría, el 40% (8), afirman que lo hacen algunas veces. Es decir algunas veces identifican las variables como otras veces no lo hacen. La cuarta parte de estudiantes no pueden identificar correctamente las variables de un problema.

Tabla 2. Identifica, correctamente, los datos dados en un problema matemático

	Frecuencia	Porcentaje
Siempre	8	40%
A veces	9	45%
Nunca	3	15%
Total	20	100%

Fuente: Evaluación a estudiantes 2014

Interpretación

En esta tabla se tiene que el 40% (8) siempre identifica correctamente los datos de un problema, sin embargo un 15% (3) nunca los puede identificar, mientras que un 45% (9) a veces acierta y otras veces no.

Tabla 3. Identifica las restricciones dadas en un problema matemático

	Frecuencia	Porcentaje
Siempre	4	20%
A veces	10	50%
Nunca	6	30%
Total	20	100%

Fuente: Evaluación a estudiantes 2014

Interpretación

Solamente el 20%(4) logra identificar las restricciones dadas en un problema, en tanto el 30% (6) nunca identifica las restricciones y un 50% (10) tiene un comportamiento incierto en la identificación de las mismas. Aproximadamente la tercera parte de estudiantes nunca logra reconocer las restricciones de un problema.

Tabla 4. Construye, correctamente, el modelo correspondiente al problema matemático

	Frecuencia	Porcentaje
Siempre	4	20%
A veces	8	40%
Nunca	8	40%
Total	20	100%

Fuente: Evaluación a estudiantes 2014

Interpretación

Solamente el 20% (4) logra construir correctamente el modelo matemático del problema y el 40% (8) nunca logran tal objetivo. El 40% (8) muestra incertidumbre respecto a la construcción del modelo matemático.

Tabla 5. Elabora gráficos para capturar y describir las características matemáticas de un problema.

	Frecuencia	Porcentaje
Siempre	4	20%
A veces	14	70%
Nunca	2	10%
Total	20	100%

Fuente: Evaluación a estudiantes 2014

Interpretación

Solamente el 20% (4) elabora gráficos para capturar y describir las características matemáticas de un problema y el 10% (2) nunca logra tal objetivo. Esto significa que los encuestados no logran capturar y describir un problema a través de un gráfico, a pesar que el 70% (14) sostiene que a veces lo hace. La visualización gráfica de un problema facilita la comprensión del mismo.

Tabla 6. Emplea tablas de doble entrada para sistematizar los datos del problema.

	Frecuencia	Porcentaje
Siempre	6	30%
A veces	8	40%
Nunca	6	30%
Total	20	100%

Fuente: Evaluación a estudiantes 2014

Interpretación

El 30% (6) de estudiantes no tiene la habilidad de hacer uso de este recurso para sistematizar los datos del problema lo cual le genera dificultades en la formulación del modelo matemático y solamente el 30% (6) usa la tabla de doble entrada

Tabla 7. Utiliza diversos formatos para presentar los resultados matemáticos.

	Frecuencia	Porcentaje
Siempre	3	15%
A veces	12	60%
Nunca	5	25%
Total	20	100%

Fuente: Evaluación a estudiantes 2014

Interpretación

Únicamente el 15% (3) utiliza diversos formatos para presentar sus resultados y el 25% (5) nunca hace uso de este recurso. El 60% (12) afirman que a veces usan diversos formatos para tal fin.

Tabla 8. Expreso, correctamente, los conceptos, propiedades, resultados que utilizo para resolver problemas.

	Frecuencia	Porcentaje
Siempre	3	15%
A veces	10	50%
Nunca	7	35%
Total	20	100%

Fuente: Evaluación a estudiantes 2014

Interpretación

Solamente 15% (3) expresa correctamente los conceptos, propiedades, resultados que utiliza para resolver problemas mientras que un porcentaje un poco mayor que el doble, 35% (7), nunca lo hace. Sin embargo, el 50% (10) manifiesta un uso no continuo de los recursos matemáticos que utiliza en la resolución de problemas.

Tabla 9. Comunico, adecuadamente, el procedimiento empleado en la resolución de un problema.

	Frecuencia	Porcentaje
Siempre	4	20%
A veces	9	45%
Nunca	7	35%
Total	20	100%

Fuente: Evaluación a estudiantes 2014

Interpretación

El comportamiento de los encuestados en este ítem es similar al del ítem 8, a pesar que el porcentaje de los que a veces comunican adecuadamente el procedimiento empleado en la resolución del problema disminuye a 45% (9).

Tabla 10. Redacto, correctamente, la respuesta o solución de un problema.

	Frecuencia	Porcentaje
Siempre	4	20%
A veces	10	50%
Nunca	6	30%
Total	20	100%

Fuente: Evaluación a estudiantes 2014

Interpretación

El 20% (4) siempre redacta, en forma correcta, la respuesta o solución de un problema y el 30% (6) nunca puede hacerlo. El 50% (10) afirma que a veces logra una redacción correcta de la respuesta.

Tabla 11. Fórmula con precisión, preguntas relacionadas con el problema

	Frecuencia	Porcentaje
Siempre	4	20%
A veces	11	55%
Nunca	5	25%
Total	20	100%

Fuente: Evaluación a estudiantes 2014

Interpretación

Aquí el porcentaje de los que nunca formulan con precisión preguntas, 25%, es mayor a los que siempre lo hacen, 20%. Esto pone de manifiesto que los estudiantes tienen dificultad para hacer preguntas en clase.

Tabla 12. Elaboro y ejecuta un plan para resolver problemas

	Frecuencia	Porcentaje
Siempre	8	40%
A veces	9	45%
Nunca	3	15%
Total	20	100%

Fuente: Evaluación a estudiantes 2014

Interpretación

A pesar que el 40% (8) manifiestan que siempre elaboran y ejecutan un plan para resolver problemas, no es la mayoría como se desea. Además, el 15% (3) nunca ejecutan un plan para resolver problemas y el 45% (9) manifiesta que a veces realiza esta acción.

Tabla 13. Trabajo en equipo para resolver problemas

	Frecuencia	Porcentaje
Siempre	8	40%
A veces	8	40%
Nunca	4	20%
Total	20	100%

Fuente: Evaluación a estudiantes 2014

Interpretación

Existe una tendencia de los estudiantes, que no es la mayoría, a realizar un trabajo en equipo para resolver problemas, aunque un 20% (4) indican que nunca usan esta metodología.

Tabla 14. Busco, organizo y evalúo la información matemática encontrada en los libros, internet, consultas con otras personas para resolver problemas

	Frecuencia	Porcentaje
Siempre	5	25%
A veces	11	55%
Nunca	4	20%
Total	20	100%

Fuente: Evaluación a estudiantes 2014

Interpretación

El 25% (5) siempre busca, organiza y evalúa la información matemática encontrada en otros medios para resolver problemas así como otro 55% (11) lo hace a veces. En cambio, un 20% (4) nunca realiza estas acciones y es necesario inculcar en ellos el uso de todos los recursos matemáticos para lograr resolver problemas.

Tabla 15. Uso, adecuadamente, los símbolos matemáticos que expresan relación entre dos objetos matemáticos.

	Frecuencia	Porcentaje
Siempre	4	20%
A veces	12	60%
Nunca	4	20%
Total	20	100%

Fuente: Evaluación a estudiantes 2014

Interpretación

Solamente un 20% (4), manifiesta que siempre usa adecuadamente los símbolos matemáticos que expresan relación entre dos objetos matemáticos y un 60% (12)

a veces hace uso correcto de estos símbolos. Sin embargo, es necesario motivar al 20% (4) en el uso de dichos símbolos.

Tabla 16. Utilizo, correctamente, los símbolos de la lógica matemática

	Frecuencia	Porcentaje
Siempre	5	25%
A veces	11	55%
Nunca	4	20%
Total	20	100%

Fuente: Evaluación a estudiantes 2014

Interpretación

El 25% (5) siempre utiliza correctamente los símbolos de la lógica matemática y un 20% (4) nunca logran usar correctamente estos símbolos. Como un 55% (11) a veces lo hace correctamente nos permite inferir que existe deficiencias en el uso adecuado de los símbolos de la lógica matemática.

Tabla 17. Utilizo, correctamente, los símbolos del cálculo diferencial

	Frecuencia	Porcentaje
Siempre	4	20%
A veces	12	60%
Nunca	4	20%
Total	20	100%

Fuente: Evaluación a estudiantes 2014

Interpretación

El 20% (4) siempre utiliza correctamente los símbolos del cálculo diferencial y también un 20% (4) nunca logran usar correctamente estos símbolos. Como un 60% (12) a veces lo hace correctamente nos permite inferir que existe deficiencias en el uso adecuado de los símbolos del cálculo diferencial.

Tabla 18. Uso, correctamente, los símbolos del cálculo integral

	Frecuencia	Porcentaje
Siempre	4	20%
A veces	10	50%
Nunca	6	30%
Total	20	100%

Fuente: Evaluación a estudiantes 2014

Interpretación

El 20% (4) siempre utiliza correctamente los símbolos del cálculo integral y también un 30% (6) nunca logran usar correctamente estos símbolos. Como un 50% (10) a veces lo hace correctamente nos permite inferir que existe deficiencias en el uso adecuado de los símbolos del cálculo integral.

Tabla 19. Utilizo, convenientemente, los signos de colección

	Frecuencia	Porcentaje
Siempre	4	20%
A veces	10	50%
Nunca	6	30%
Total	20	100%

Fuente: Evaluación a estudiantes 2014

Interpretación

El 20% (4) siempre utiliza correctamente los signos de colección y también un 30% (6) nunca logran usar correctamente estos signos. Como un 50% (10) a veces lo hace correctamente nos permite inferir que existe deficiencias en el uso conveniente de los signos de colección.

Tabla 20. Explico el proceso de resolución de un problema

	Frecuencia	Porcentaje
Siempre	3	15%
A veces	10	50%
Nunca	7	35%
Total	20	100%

Fuente: Evaluación a estudiantes 2014

Interpretación

Solamente el 15% (3) puede explicar el proceso de resolución de un problema, que constituye un grupo muy reducida, el 50% (10) a veces logra hacerlo y el 35% (7) no puede hacer dicha explicación. Se puede inferir que los estudiantes tienen dificultades para poder explicar el proceso de resolución de un problema.

Tabla 21. Organizo y planteo una secuencia lógica que sustente el procedimiento de resolución de un problema

	Frecuencia	Porcentaje
Siempre	3	15%
A veces	9	45%
Nunca	8	40%
Total	20	100%

Fuente: Evaluación a estudiantes 2014

Interpretación

Un pequeño grupo de estudiante, el 15% (3), siempre puede organizar y plantear una secuencia lógica que sustente el procedimiento de resolución de un problema, el 45% (9) a veces lo hace y el 40% (8) nunca logran hacerlo. Esto nos permite inferir que los estudiantes tienen dificultades para sustentar una secuencia lógica en la resolución de problemas.

Tabla 22. Selecciono los conceptos, propiedades, resultados y procedimientos coherentes para justificar una secuencia en la resolución de un problema.

	Frecuencia	Porcentaje
Siempre	3	15%
A veces	10	50%
Nunca	7	35%
Total	20	100%

Fuente: Evaluación a estudiantes 2014

Interpretación

Solamente el 15% (3) puede siempre seleccionar los conceptos, propiedades, resultados y procedimientos coherentes para justificar una secuencia lógica en la resolución de un problema, que constituye un grupo muy reducida, el 50% (10) a veces logra hacerlo y el 35% (7) nunca puede hacer dicha justificación. Se puede inferir que los estudiantes tienen dificultades para poder justificar una secuencia en el proceso de resolución de un problema.

IV: DISCUSIÓN DE RESULTADOS

Con respecto a la capacidad Matematizar, de acuerdo a los resultados de la encuesta se observa que los estudiantes encuestados tienen muchas dificultades para construir el modelo matemático de un problema puesto que el 40% de los encuestados nunca logran construirlo y solamente el 20% siempre lo realiza, aun cuando pueden identificar algunas partes del mismo. Considerando que el modelo matemático es un punto crítico en la resolución de problemas, podemos afirmar, de acuerdo con Miguel de Guzmán, que los estudiantes no logran explorar las estructuras de la realidad que son accesibles para expresarlas en el lenguaje matemático. Por lo tanto no desarrollan la matematización horizontal ni mucho menos la vertical.

Asimismo, de acuerdo a G. Polya podemos afirmar que el estudiante tiene dificultades para construir el modelo matemático, debido a que no comprende el problema.

Mediante el módulo EDOPO se desarrollará una práctica continua de la identificación de las variables, datos, restricciones que facilitan la formulación del modelo matemático de un problema.

En relación a la capacidad Representar, los encuestados muestran grandes dificultades para capturar y describir las características matemáticas de un problema a través de gráficos. Recordemos que los pitagóricos, entre quienes se consolidó la matemática como ciencia, al estudiar los números y sus relaciones usaban configuraciones diversas con piedrecillas, pues para ellos lo visual y los procesos de visualización eran totalmente connaturales a la matemática. Asimismo, Zimmermann W. y Cunningham S.(1991) sostienen que la visualización se toma como la habilidad para trazar con lápiz y papel un diagrama apropiado, que sirve para representar un concepto matemático o un problema y ayuda a comprender el concepto o a resolver el problema. De aquí se infiere que los estudiantes al no poseer la habilidad de representar o visualizar, no pueden comprender los conceptos matemáticos inmersos en la resolución de problemas. A su vez, esta debilidad tiene relación con la deficiencia en la capacidad de matematizar. En matemática, es muy importante visualizar un problema porque permite comprender el problema desde el punto de vista de G. Polya y nos proporciona algunas pistas para resolverlo.

El módulo EDOPO facilitará el desarrollo de la capacidad representar mediante el uso de gráficos, diagramas, bosquejos que facilitan la comprensión de conceptos, procedimientos o resolución de problemas.

En cuanto a la capacidad Comunicar es muy importante saber transmitir tanto por escrito como oralmente las ideas, conceptos, propiedades, procedimientos y resultados matemáticos que se emplean en la resolución de problemas, porque de esta manera, según la NCTM, se comparten y clarifican las ideas matemáticas, y estas se transforman en objetos de reflexión, perfeccionamiento, discusión y rectificación. Sin embargo, según los resultados de la encuesta solamente el 20%

logra siempre expresar y comunicar adecuadamente los recursos matemáticos que utiliza en la resolución de problemas, lo cual dificulta realizar según G. Polya una adecuada visión retrospectiva de la solución.

El módulo EDOPO estimulará el desarrollo de esta capacidad mediante el trabajo en equipo y exposiciones grupales.

Con respecto a la capacidad Elaborar estrategias, solamente el 25% de estudiantes muestra habilidades para buscar, organizar y evaluar información matemática de varias fuentes y un 40% manifiesta saber trabajar en equipo, aunque un 15%, nunca elabora y ejecuta un plan para resolver problemas. Esta realidad es opuesta a necesidad, planteada por G. Polya, de elaborar y ejecutar un plan para resolver el problema.

El módulo EDOPO desarrollará esta capacidad mediante el trabajo en equipo y la formulación de problemas contextualizados.

En la capacidad Utilizar expresiones simbólicas, máximo el 25% de los encuestados manifiestan la utilización siempre correcta de dichas expresiones, y sin embargo casi la tercera parte de los encuestados nunca hacen uso correcto de los mismos. Es muy importante tener en cuenta que los símbolos algebraicos y los procedimientos para trabajar con dichos símbolos han sido un gran logro en la historia de las matemáticas y son críticos en el trabajo matemático, tal como lo sostiene la NCTM. Estos símbolos constituyen parte del lenguaje matemático y tienen caracteres sintácticos, semánticos y funcionales peculiares, además se utilizan para dar una estructura matemática a una situación problemática.

Al resolver un problema se tiene que usar expresiones simbólicas para identificar las variables y datos del problema, considerados por G. Polya, como parte de la comprensión del mismo y elaboración de un plan para resolverlo.

El módulo EDOPO reforzará el uso de expresiones simbólicas a través de la matematización de las situaciones problemáticas.

Por último, con respecto a la capacidad Argumentar los encuestados muestran mucha debilidad en la selección de los recursos matemáticos que le permitan organizar y explicar la secuencia lógica desarrollada en la resolución de un problema. Solamente el 15% de los encuestados puede hacerlo y el 40% nunca lo realiza.

Esta situación no es concordante con lo que plantea el NCTM, que sostiene que los estudiantes deben desarrollar capacidades de argumentación con el fin de poder exponer y defender sus ideas y resultados, suponiendo que dichas capacidades favorecerán en el futuro los procesos de demostración matemática.

Asimismo, esta situación no contribuye a que el estudiante logre ejecutar un plan y justificar los diferentes pasos, como lo plantes G. Polya, para realizar el análisis retrospectivo de la solución del problema.

A través del módulo EDOPO se buscará potenciar la capacidad de argumentar con la finalidad que el estudiante sustente o justifique la cadena de afirmaciones que realiza en la resolución de problemas.

En general, el módulo EDOPO buscará que el estudiante logre construir sus conocimientos, según J. Piaget, a través de una práctica continua de resolución de problemas contextualizados de acuerdo a su carrera, generando un aprendizaje significativo y relevante para el alumno mediante una participación activa en el proceso de aprendiza como lo sostiene Carl Rogers.

V. CONCLUSIONES

Los resultados de la aplicación del cuestionario muestran que los estudiantes de Matemáticas III de Ingeniería Civil de la Universidad César Vallejo, Chiclayo, tienen dificultades en el desarrollo de las capacidades de matematización, representación, comunicación, elaboración de estrategias, utilización de expresiones simbólicas y argumentación de la secuencia lógica que sustenta la resolución de problemas.

Se logró diseñar el módulo didáctico de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden, utilizando el método de resolución de problemas de George Polya.

El módulo didáctico EDOPO fue validada por juicio de expertos competentes en la materia, en lo que respecta a sus fundamentos teóricos, definición, requisitos básicos, didáctica y síntesis del mismo.

Se propone el módulo didáctico de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden, denominada EDOPO, sustentada en el enfoque humanista de Carl Roger, la teoría del desarrollo cognitivo de Jean Piaget y los principios psicopedagógicos del aprendizaje con la finalidad de mejorar las capacidades matemáticas de los estudiantes de Ingeniería Civil de la Universidad César Vallejo, Chiclayo

VI. RECOMENDACIONES

Que la Escuela de Ingeniería Civil de la Universidad César Vallejo, Chiclayo, aplique el módulo didáctico EDOPO en el desarrollo de la asignatura de matemática III.

La Escuela de Ingeniería Civil de la Universidad César Vallejo, Chiclayo realice una capacitación de los docentes de matemática en el manejo del módulo EDOPO

Que los docentes de matemáticas, para la aplicación del módulo didáctico EDOPO coordinen con los docentes del área de comunicación de la Universidad César Vallejo, Chiclayo, con la finalidad de fortalecer las capacidades comunicar y argumentar en los estudiantes de Matemática III de Ingeniería Civil.

A las instituciones de enseñanza universitaria utilizar el módulo como recurso de enseñanza debido a la facilidad en su estructura, actividades y ejercicios.

VII. PROPUESTA DEL MÓDULO DIDÁCTICO

Definición del módulo didáctico EDOPO.

EDOPO es un módulo didáctico basado en el trabajo colaborativo, diseñado para la asignatura de Matemática III, que involucra un conjunto de procesos, recursos y técnicas que debidamente ordenados y articulados permiten a los educandos desarrollar habilidades para la comprensión de información y la indagación y experimentación. Las capacidades que se desarrollan con el presente módulo son: matematizar, representar, comunicar, elaborar estrategia, utilizar expresiones simbólicas y argumentar, las mismas que se explican a continuación.

A. **Matematizar:** Implica expresar una parte de la realidad, un contexto concreto o una situación problemática, definida en el mundo real, en términos matemáticos. Para ello el estudiante debe:
   Identificar correctamente la o las variables presentes en la situación problemática.
   Identificar correctamente los datos e información relevante de la situación problemática.
   Identificar las restricciones o limitaciones de la situación problemática.
   Formular el modelo matemático correspondiente.
B. **Representar:** Se refiere a la representación matemática de los objetos. Existen diversas formas de representar las cosas (gráficos, tablas, diagramas, imágenes, etc.) que nos permiten capturar y describir la estructura y las características matemáticas de una determinada situación. El aprendizaje de la matemática es un proceso que va de lo concreto a lo abstracto.
C. **Comunicar:** El lenguaje matemático es también una herramienta que nos permite comunicarnos con los demás, incluyendo distintas formas de expresión

y comunicación (oral, escrita, simbólica, gráfica). La gran cantidad de información matemática que se dispone requiere desarrollar en los estudiantes la capacidad de comunicación escrita. Eso les posibilita identificar, procesar, producir y administrar información matemática escrita.

D. **Elaborar estrategias:** Al enfrentar una situación problemática de la vida real, lo primero que hacemos es dotarla de una estructura matemática. Luego, seleccionamos una alternativa de solución entre otras opciones. Si no disponemos de ninguna alternativa intentamos crearla. Entonces, cuando ya disponemos de una alternativa razonable de solución, elaboramos una estrategia. De esta manera, la resolución de una situación problemática supone la selección o elaboración de una estrategia para guiar el trabajo, interpretar, evaluar y validar su procedimiento y solución matemáticos. La construcción de conocimientos matemáticos requiere también seleccionar o crear y diseñar estrategias de construcción de conocimientos.

E. **Utilizar expresiones simbólicas:** Existen diferentes formas de simbolizar. Éstas han ido construyendo sistemas simbólicos con característica sintácticas, semánticas y funcionales peculiares. El uso de las expresiones y símbolos matemáticos ayudan a la comprensión de las ideas matemática, sin embargo éstas no son fáciles de generar debido a la complejidad de los procesos de simbolización. La capacidad de usar símbolos y expresiones simbólicas es indispensable para construir conocimiento y resolver problemas matemáticos. Pero también para comunicar, explicar y entender resultados matemáticos.

F. **Argumentar:** Esta capacidad es fundamental no solo para el desarrollo del pensamiento matemático, sino para organizar y plantear secuencias, formular conjeturas y corroborarlas, así como establecer conceptos, juicios y razonamientos que den sustento lógico y coherente al procedimiento o solución encontrada.

   Así, se dice que la argumentación puede tener tres diferentes usos:

   1. Explicar procesos de resolución de situaciones problemáticas.
   2. Justificar, es decir, hacer una exposición de las conclusiones o resultados a los que se haya llegado.
   3. Verificar conjeturas, tomando como base elementos del pensamiento matemático.

La capacidad de argumentar se aplica para justificar la validez de los resultados obtenidos. El diálogo colectivo basado en afirmaciones u opiniones argumentadas, así como el análisis de la validez de los procesos de resolución de situaciones problemáticas favorecen el aprendizaje matemático.

Requisitos básicos del módulo didáctico EDOPO

El módulo didáctico EDOPO requiere de una adecuada planificación por parte del docente, por ello su didáctica obliga a cumplir o adecuarse a los siguientes requisitos:

- Antes de la aplicación del módulo, el docente debe alcanzar y explicar a los estudiantes la información respecto a la didáctica del módulo didáctico EDOPO.
- El aula debe contar con área suficiente para que puedan desarrollar su labor los equipos de trabajo.
- Contar preferentemente con un equipo multimedia y una computadora. Si en caso no hubiera puede ser sustituido por transparencias o papelógrafos.
- Se recomienda trabajar el módulo didáctico en bloques de 2 horas pedagógicas a más.

7.3.1 Didáctica del módulo didáctico EDOPO

El módulo didáctico EDOPO involucra diversos procedimientos, recursos y técnicas que requieren de una adecuada planificación por parte del docente, por ello su didáctica obliga a seguir la siguiente secuencia:

Paso 1: Formación de los equipos de trabajo. El docente forma los equipos de trabajo distribuidos de manera homogénea tratando que los estudiantes de mejor rendimiento se distribuyan en diferentes equipos de trabajo, luego cada equipo debe elegir democráticamente un coordinador quien será el responsable de liderar el trabajo mientras dure la estrategia.

Cada equipo se identificará con un número, por ejemplo equipo N° 1, equipo N° 2, hasta llegar al equipo N° 6, el cual será asignado en público mediante sorteo.

Paso 2: Organización de los contenidos. El docente organiza las tareas que deben presentar cada equipo durante el desarrollo de la secuencia didáctica del módulo didáctico EDOPO y brinda sugerencias a cada uno de ellos respecto a cómo desarrollar cada habilidad a lo largo de la ejecución de la secuencia didáctica.

Paso 3: Aplicación del módulo didáctico EDOPO. Una vez asignados los equipos de trabajo y determinados los temas, se inicia la secuencia didáctica del módulo didáctico EDOPO.

El docente es el que gestiona toda la secuencia didáctica y ayuda a subsanar dificultades. La misma secuencia se aplica a los otros temas programados.

Paso 4: Sistematización de los resultados. Una vez concluidos la secuencia didáctica de cada tema, el docente sistematiza los resultados de la evaluación de cada equipo y lo traduce a la escala vigesimal.

Síntesis gráfica de la propuesta

DIAGNÓSTICO DE LAS DIFICULTADES PARA MEJORAR LAS CAPACIDADES MATEMÁTICAS EN LOS ESTUDIANTES DE INGENIERÍA CIVIL DE LA UNIVERSIDAD CÉSAR VALLEJO, CHICLAYO.

MÓDULO DIDÁCTICO EDOPO

DEFINICIÓN

Módulo de trabajo colaborativo diseñada para el área de MATEMATICA, que involucra un conjunto de procesos, recursos y técnicas que debidamente ordenados y articulados permiten a los educandos desarrollar capacidades matemáticas para la resolución de problemas de ecuaciones diferenciales de primer orden que se presentan en la vida diaria.

CAPACIDADES

MATEMATIZAR

REPRESENTAR

COMUNICAR

ELABORAR ESTRATEGIAS

UTILIZAR EXPRESIONES SIMBÓLICAS

ARGUMENTAR

REQUISITOS

Informar a los estudiantes sobre su didáctica

Espacio adecuado

Contar con un equipo multimedia

Bloques de horas de 2 a más

PASOS

Formar equipos de trabajo

Organizar los contenidos según la unidad

Aplicar el módulo EDOPO

Sistematizar los resultados de la evaluación del módulo EDOPO

TEORÍA DEL DESARROLLO COGNITIVO DE JEAN PIAGET
TEORÍA HUMANISTA DE CARL ROGER
PRINCIPIOS PSICOPEDAGÓGICOS DEL APRENDIZAJE

EFECTOS DE LA APLICACIÓN DEL MÓDULO EDOPO PARA MEJORAR LAS CAPACIDADES MATEMÁTICAS EN LOS ESTUDIANTES DE INGENIERÍA CIVIL DE LA UNIVERSIDAD CÉSAR VALLEJO, CHICLAYO.

VIII. REFERENCIAS.

Aredo, M. (2012). *Modelo metodológico en el marco de algunas teorías constructivistas para la enseñanza – aprendizaje de funciones reales del curso de matemática básica en la Facultad de Ciencias de la Universidad Nacional de Piura.* Tesis de Maestría. Pontificia Universidad Católica del Perú, Lima. Perú.

Calvo, M. (2005). *Formador ocupacional. Formador de formadores.* Recuperado de: https://books.google.com.pe/books?id=kxzx6GaYaCYC&pg=SL26-PA97&lpg=SL26PA97&dq

De Guzmán, M (1996). *El papel de la visualización*. Recuperado de imerl.fing.edu.uy/...matematica/.../Visualizacion_Miguel_de_Guzman.pd.

De Guzmán**,** M**.** (2001). *Tendencias actuales de la educación matemática*. Recuperado de:http://www.cimm.ucr.ac.cr/ciaem/articulos/universitario/conocimiento/Tendencias%C2%A0actuales%C2%A0de%C2%A0la%C2%A0eduaci%C3%B3n%C2%A0matem%C3%A1tica.*Guzm%C3%A1n%C2%A0Oz%C3%A1miz,%20Miguel%20*3_Educacion_Matematica.pdf

Delors, J. (1996). *La educación encierra un tesoro*. Recuperado de http://inabima.gob.do/descargas/bibliotecaFAIL/Pedagogia/Delors,%20Jacques%20-%20La%20educacion%20encierra%20un%20tesoro.pdf

Endara, S. (2002*). Metodología de las Ciencias Naturales (PAD: Programa de Atención a Docentes*) Quito, Ecuador: Santillana

Evaluación Pisa. (03 de diciembre del 2013). El Comercio. Recuperado https://elcomercio.pe/.../evaluacion-pisa-ranking-completo-que-peru-quedo-ultimo-no...

Guerra, V. (2009). *La conducción del método heurístico en la enseñanza de la matemática.* Tesis de Maestría. Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Lima. Perú.

Hernández, R., Fernández, C., Baptista, P. (2010). *Metodología de la investigación.* Quinta edición. México: McGraw-Hill/Interamericana Editores.

Hernández, Zapata, Mendoza (2013). *Metodología de la investigación para bachillerato. Enfoque por competencias*. México: McGraw-Hill/Interamericana Editores.

Mendoza, C. (2011). *Corrientes Psicopedagógicas contemporáneas*, editorial Vallejiana. Trujillo – Perú

Ministerio de Educación del Perú (2009). *Diseño curricular nacional.* La educación Básica regular. Proceso de articulación

Ministerio de Educación del Perú (2013). *Rutas de Aprendizaje. Hacer uso de saberes matemáticos para afrontar desafíos diversos*. Fascículo general 2. Versión 1.0. Lima: Corporación Gráfica Navarrete.

National Council of Teachers of Mathematics.(NCTM,2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Piaget, J. (1975). *Psicología del niño.* Madrid, España: Morata

Polya, G. (1989). Cómo plantear y resolver problemas, México, Trillas.

Quinteros, E. (2014). *Dificultades que identifican los estudiantes a través de la metacognición en el aprendizaje de las matemáticas en educación secundaria.* Tesis de Maestría. Universidad Autónoma de Manizales, Manizales. Colombia.

Reynoso, E. (2011). *Factores que determina el rendimiento escolar en el nivel secundario en el estado de nuevo león.* Recuperado: http://www.sedbogota.edu.co/evaluacion/files/Factores%20que%20influyen%20en%20el%20rendimiento%20escolar.pdf.

Rogers (como se citó en Williams, M. y Burden, R. (1997)

Sánchez, H. y Reyes, C. (1984). *Metodología y diseños en la investigación científica. Aplicadas a la psicología, educación y ciencias sociales*. (1ª ed.). Lima.

UNESCO (1998). *La Educación Superior en el siglo XXI, Visión y Acción. Conferencia sobre la educación superior*. Paris: Francia. Recuperado de http://unesdoc.unesco.org/images/0011/001163/116345s.pdf

UNESCO (2009). *Conferencia Mundial sobre Educación Superior - 2009. La nueva dinámica de la educación superior y la investigación para el cambio social y el desarrollo*. Paris. Recuperado de http://www.unesco.org/education/WCHE2009/comunicado_es.pdf

Vera, J. (2012). Aplicación de un módulo básico de matemática financiera y su efecto en el desarrollo de capacidades del área de matemática en los alumnos del segundo grado de educación secundaria de la institución educativa "Horacio Zevallos Games"- Chiclayo 2013. Tesis de Maestría. Universidad César Vallejo, Chiclayo. Perú.

Williams, M. y Burden, R. (1997). Psychology for language teacher, Cambridge, Cambridge University Press

Zapata, L. y Burga, R. (2014). *Aplicación del módulo "Límites y continuidad de funciones" para mejorar el desarrollo de capacidades en los estudiantes del curso de Cálculo I de la Facultad de Ingeniería y Arquitectura de la Universidad de San Martín de Porres Filial Norte, Chiclayo 2014.* Tesis de Maestría. Universidad César Vallejo, Chiclayo. Perú.

Zavaleta, E (2012). *Las capacidades y sus procesos cognitivos*. Recuperado

Zimmermann, W. Cunningham, S. (1991) *Visualization in teaching and learning mathematics.* Washington: Mathematical Association of America.

ANEXOS

Anexo 1. MATRIZ DE CONSISTENCIA

PROBLEMA	OBJETIVOS	HIPÓTESIS	VARIABLES	METODOLOGÍA	POBLACIÓN
Problema ¿En qué medida la propuesta de un módulo didáctico de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden contribuirá a mejorar las capacidades Matemáticas en los estudiantes de Ingeniería Civil de la Universidad César Vallejo, Chiclayo?	**Objetivo general** Diseñar un módulo didáctico de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden para mejorar las capacidades matemáticas en los estudiantes de Ingeniería Civil de la Universidad César Vallejo, Chiclayo. **Objetivos específicos** Diagnosticar las dificultades para mejorar las capacidades matemáticas de los estudiantes de Ingeniería Civil de la Universidad César Vallejo, Chiclayo. Diseñar y proponer el módulo didáctico de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden para mejorar el nivel de desarrollo de las capacidades matemáticas de los estudiantes de Ingeniería Civil de la Universidad César Vallejo, Chiclayo. Validar la propuesta del módulo didáctico de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden mediante juicio de expertos.	La propuesta de un módulo didáctico de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden contribuirá a mejorar las capacidades Matemáticas de los estudiantes de Ingeniería Civil de la Universidad César Vallejo, Chiclayo.	**Variable independiente** Módulo didáctico de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de primer orden. **Variable dependiente** Capacidades matemáticas.	**Tipo de investigación** Es tipo descriptiva propositiva. **Método de investigación** Los métodos teóricos empleados en la presente investigación son: Método histórico. Método de análisis. Método de modelación. **Diseño de investigación** El diseño de investigación es propositivo.	**Población** La población está integrada por todos los estudiantes de la asignatura de Matemática III, (secciones A, B y C) de la Escuela Académico Profesional de Ingeniería Civil de la Universidad César Vallejo, Chiclayo-2014. **Muestra** La muestra estará conformada por 20 estudiantes de la asignatura de Matemática III, sección A, de la Escuela Académico Profesional de Ingeniería Civil de la Universidad César Vallejo, Chiclayo-2014,

Anexo 2. ENCUESTA APLICADA A LOS ESTUDIANTES DE LA UNIVERSIDAD CÉSAR VALLEJO

INSTRUMENTOS

INTRODUCCIÓN

Se ha creído conveniente diseñar el presente cuestionario de tal manera que se pueda diagnosticar el nivel de desarrollo de 6 capacidades matemáticas: matematizar, representar, comunicar, elaborar estrategias, utilizar expresiones simbólicas, argumentar, consideradas esenciales para el uso de la matemática en la vida diaria y que sustentan la competencia matemática de resolución de problemas.

OBJETIVO:

Determinar el nivel de desarrollo de las capacidades matemáticas: matematizar, representar, comunicar, elaborar estrategias, utilizar expresiones simbólicas, argumentar, en los estudiantes de la asignatura de matemática III de la Escuela Académico Profesional de Ingeniería Civil de la Universidad César Vallejo – Chiclayo.

I. INSTRUCCIONES:

Marque con un aspa la respuesta que considera correcta

1. Identifico, correctamente, la o las variables presentes en un problema matemático.

   Siempre ☐ A veces ☐ Nunca ☐

2. Identifico, correctamente, los datos dados en un problema matemático.

   Siempre ☐ A veces ☐ Nunca ☐

3. Identifico las restricciones dadas en un problema matemático.

   Siempre ☐ A veces ☐ Nunca ☐

4. Construyo, correctamente, el modelo correspondiente al problema matemático.

Siempre ☐ A veces ☐ Nunca ☐

5. Elaboro gráficos para capturar y describir las características matemáticas de un problema.

Siempre ☐ A veces ☐ Nunca ☐

6. Empleo tablas de doble entrada para sistematizar los datos de un problema

Siempre ☐ A veces ☐ Nunca ☐

7. Utilizo diversos formatos para presentar los resultados matemáticos.

Siempre ☐ A veces ☐ Nunca ☐

8. Expreso, correctamente, los conceptos, propiedades, resultados que utilizo para resolver problemas.

Siempre ☐ A veces ☐ Nunca ☐

9. Comunico, adecuadamente, el procedimiento empleado en la resolución de un problema.

Siempre ☐ A veces ☐ Nunca ☐

10. Redacto, correctamente, la respuesta o solución de un problema.

Siempre ☐ A veces ☐ Nunca ☐

11. Formulo, con precisión, preguntas relacionadas con el problema.

Siempre ☐ A veces ☐ Nunca ☐

12. Elaboro y ejecuto un plan para resolver problemas.

Siempre ☐ A veces ☐ Nunca ☐

13. Trabajo en equipo para resolver problemas

Siempre ☐ A veces ☐ Nunca ☐

14. Busco, organizo y evalúo la información matemática encontrada en los libros, internet, consultas con otras personas para resolver problemas.

Siempre ☐ A veces ☐ Nunca ☐

15. Uso, adecuadamente, los símbolos matemáticos que expresan relación entre dos objetos matemáticos (=, <, >, ≤, ≥)

Siempre ☐ A veces ☐ Nunca ☐

16. Utilizo, correctamente, los símbolos de la lógica matemática. ($\Rightarrow, \Leftrightarrow, \forall, \exists,\ etc.$)

Siempre ☐ A veces ☐ Nunca ☐

17. Utilizo, correctamente, los símbolos del cálculo diferencial. ($\frac{dy}{dx},\ dx, \frac{\partial y}{\partial x},\ etc.$)

Siempre ☐ A veces ☐ Nunca ☐

18. Uso, adecuadamente, los símbolos del cálculo integral. ($\int f(x)dx,\quad \iint f(x,y)dxdy,\ etc.$)

Siempre ☐ A veces ☐ Nunca ☐

19. Utilizo, convenientemente, los signos de colección. ((,), [,], {, }, etc.)

Siempre ☐ A veces ☐ Nunca ☐

20. Explico el proceso de resolución de un problema.

Siempre ☐ A veces ☐ Nunca ☐

21. Organizo y planteo una secuencia lógica que sustente el procedimiento de resolución de un problema.

Siempre ☐ A veces ☐ Nunca ☐

22. Selecciono los conceptos, propiedades, resultados y procedimientos coherentes para justificar una secuencia en la resolución de un problema.

Siempre ☐ A veces ☐ Nunca ☐

Anexo 3. MODELO: CRITERIO DE EXPERTO

Estimado (a):……………………………………………………………………………….

Solicito apoyo de su sapiencia y excelencia profesional para que emita juicio de investigación Titulada: **Módulo didáctico de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden para mejorar las capacidades matemáticas en los estudiantes de ingeniería civil de la Universidad César Vallejo, Chiclayo – 2014,** que se presenta. Para alcanzar este objetivo se le ha seleccionado como experto (a) en la materia y necesito su valiosa opinión. Para ello debe marcar con una (X) en la columna que considere para cada indicador.

Evalúe cada aspecto con las siguientes categorías:

MA **:** Muy adecuado.
BA **:** Bastante adecuado.
A **:** Adecuado
PA **:** Poco adecuado
NA **:** No Adecuado

N°	Aspectos que deben ser evaluados	MA	BA	A	PA	NA
I.	**Redacción Científica**					
1.1	La redacción empleada es clara, precisas, concisa y debidamente organizada					
1.2	Los términos utilizados son propios de la investigación científica					
II.	**Lógica de la Investigación**					
2.1	**Problema de Estudio**					
2.2.1	Describe de forma clara y precisa la realidad problemática tratada					
2.2.2	El problema se ha definido según estándares internaciones de la investigación científica					
2.2	**Objetivos de la Investigación**					
2.2.1	Expresan con claridad la intencionalidad de la investigación					
2.2.2	Guardan coherencia con el título, el problema, objeto campo de acción, supuestos y metodologías e instrumentos utilizados.					
2.3	**Previsiones metodológicas**					
2.3.1	Se ha caracterizado la investigación según criterios pertinentes					
2.3.2	Los escenarios y los participantes seleccionados son apropiados para los propósitos de la investigación					
2.3.3	Presenta instrumentos apropiados para recolectar datos					
2.3.4	Los métodos y técnicas empleadas en el tratamiento de la información son propios del tipo de la investigación planteada.					
2.4	**Fundamentación teórica y epistemológica**					
2.4.1	Proporciona antecedentes relevantes a la investigación, como producto de la revisión de la bibliografía referida al modelo.					
2.4.2	Proporciona sólidas bases teóricas y epistemológicas, sistematizadas en función de los objetivos de la investigación					
2.5	**Bibliografía**					
2.5.1	Presenta la bibliografía pertinente al tema y la correspondiente a la metodología a la investigación.					

2.6	**Anexos**					
2.6.1	Los anexos presentados son consistentes y contienen los datos más relevantes de la investigación					
III	**Fundamentación y viabilidad del Modelo**					
3.1.	La fundamentación teórica y epistemológica del modelo guarda coherencia con el enfoque sistémico y la nueva ciencia.					
3.2.	El modelo propuesto es coherente, pertinente y trascendente.					
3.3.	El modelo propuesto es factible de aplicarse a otras organizaciones o instituciones.					
IV	**Fundamentación y viabilidad de los Instrumentos**					
4.1.	La fundamentación teórica guarda relación con la operacionalización de la variable a evaluar.					
4.2.	Los instrumentos son coherentes a la operacionalización de variables.					
4.3.	Los instrumentos propuestos son factibles de aplicarse a otras organizaciones, grupos o instituciones de similares características de su población de estudio.					

Mucho le voy a agradecer cualquier observación, sugerencia, propósito o recomendación sobre cualquiera de los propuestos. Por favor, refiéralas a continuación:

Validado por: …………………………………………………………………………….

Especializado: …………………………………………………………………………..

Categoría Docente:………………………………………………………………………..

Tiempo de Experiencia en Docencia Universitaria: ……………………………………

Cargo Actual: ……………………………………………………………………………

Fecha: ……………………………………………………………………………………

DNI: ………………………..

JUICIO DE EXPERTOS

Anexo 4. CRITERIO DE EXPERTO 1

Estimado (a): Dr José elias plasencio Latorr

Solicito apoyo de su sapiencia y excelencia profesional para que emita juicio de investigación Titulada: **Módulo didáctico de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden para mejorar las capacidades matemáticas en los estudiantes de ingeniería civil de la Universidad César Vallejo, Chiclayo – 2014,** que se presenta. Para alcanzar este objetivo se le ha seleccionado como experto (a) en la materia y necesito su valiosa opinión. Para ello debe marcar con una (X) en la columna que considere para cada indicador.

Evalúe cada aspecto con las siguientes categorías:

MA : Muy adecuado.
BA : Bastante adecuado.
A : Adecuado
PA : Poco adecuado
NA : No Adecuado

N°	Aspectos que deben ser evaluados	MA	BA	A	PA	NA
I.	**Redacción Científica**					
1.1	La redacción empleada es clara, precisas, concisa y debidamente organizada	x				
1.2	Los términos utilizados son propios de la investigación científica	x				
II.	**Lógica de la Investigación**					
2.1	**Problema de Estudio**					
2.2.1	Describe de forma clara y precisa la realidad problemática tratada	x				
2.2.2	El problema se ha definido según estándares internaciones de la investigación científica	x				
2.2	**Objetivos de la Investigación**					
2.2.1	Expresan con claridad la intencionalidad de la investigación	x				
2.2.2	Guardan coherencia con el título, el problema, objeto campo de acción, supuestos y metodologías e instrumentos utilizados.		x			
2.3	**Previsiones metodológicas**					
2.3.1	Se ha caracterizado la investigación según criterios pertinentes	x				
2.3.2	Los escenarios y los participantes seleccionados son apropiados para los propósitos de la investigación	x				
2.3.3	Presenta instrumentos apropiados para recolectar datos					
2.3.4	Los métodos y técnicas empleadas en el tratamiento de la información son propios del tipo de la investigación planteada.	x				
2.4	**Fundamentación teórica y epistemológica**					
2.4.1	Proporciona antecedentes relevantes a la investigación, como producto de la revisión de la bibliografía referida al modelo.	x				
2.4.2	Proporciona sólidas bases teóricas y epistemológicas, sistematizadas en función de los objetivos de la investigación	x				
2.5	**Bibliografía**					
2.5.1	Presenta la bibliografía pertinente al tema y la correspondiente a la metodología a la investigación.	x				

2.6	**Anexos**					
2.6.1	Los anexos presentados son consistentes y contienen los datos más relevantes de la investigación	X				
III	**Fundamentación y viabilidad del Modelo**					
3.1.	La fundamentación teórica y epistemológica del modelo guarda coherencia con el enfoque sistémico y la nueva ciencia.	X				
3.2.	El modelo propuesto es coherente, pertinente y trascendente.	X				
3.3.	El modelo propuesto es factible de aplicarse a otras organizaciones o instituciones.	X				
IV	**Fundamentación y viabilidad de los Instrumentos**					
4.1.	La fundamentación teórica guarda relación con la operacionalización de la variable a evaluar.		X			
4.2.	Los instrumentos son coherentes a la operacionalización de variables.	X				
4.3.	Los instrumentos propuestos son factibles de aplicarse a otras organizaciones, grupos o instituciones de similares características de su población de estudio.	X				

Mucho le voy a agradecer cualquier observación, sugerencia, propósito o recomendación sobre cualquiera de los propuestos. Por favor, refiéralas a continuación:

Existe coherencia entre lo solicitado, por lo demás, puede ser aplicado a los fines pertinentes.

Validado por: Dr. José Elias Plasencia Latour

Especializado: investigación

Categoría Docente: Nombrado

Tiempo de Experiencia en Docencia Universitaria: 20 años

Cargo Actual: Decano

Fecha: febrero del 2018

DNI: 32735107

Anexo 5. CRITERIO DE EXPERTO 2

Estimado (a): Olga Cecilia Juárez Calderón

Solicito apoyo de su sapiencia y excelencia profesional para que emita juicio de investigación Titulada: **Módulo didáctico de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden para mejorar las capacidades matemáticas en los estudiantes de ingeniería civil de la Universidad César Vallejo, Chiclayo – 2014,** que se presenta. Para alcanzar este objetivo se le ha seleccionado como experto (a) en la materia y necesito su valiosa opinión. Para ello debe marcar con una (X) en la columna que considere para cada indicador.

Evalúe cada aspecto con las siguientes categorías:

MA : Muy adecuado.
BA : Bastante adecuado.
A : Adecuado
PA : Poco adecuado
NA : No Adecuado

N°	Aspectos que deben ser evaluados	MA	BA	A	PA	NA
I.	**Redacción Científica**					
1.1	La redacción empleada es clara, precisas, concisa y debidamente organizada	✓				
1.2	Los términos utilizados son propios de la investigación científica	✓				
II.	**Lógica de la Investigación**					
2.1	**Problema de Estudio**					
2.2.1	Describe de forma clara y precisa la realidad problemática tratada	✓				
2.2.2	El problema se ha definido según estándares internaciones de la investigación científica	✓				
2.2	**Objetivos de la Investigación**					
2.2.1	Expresan con claridad la intencionalidad de la investigación	✓				
2.2.2	Guardan coherencia con el título, el problema, objeto campo de acción, supuestos y metodologías e instrumentos utilizados.	✓				
2.3	**Previsiones metodológicas**					
2.3.1	Se ha caracterizado la investigación según criterios pertinentes	✓				
2.3.2	Los escenarios y los participantes seleccionados son apropiados para los propósitos de la investigación	✓				
2.3.3	Presenta instrumentos apropiados para recolectar datos	✓				
2.3.4	Los métodos y técnicas empleadas en el tratamiento de la información son propios del tipo de la investigación planteada.	✓				
2.4	**Fundamentación teórica y epistemológica**					
2.4.1	Proporciona antecedentes relevantes a la investigación, como producto de la revisión de la bibliografía referida al modelo.		✓			
2.4.2	Proporciona sólidas bases teóricas y epistemológicas, sistematizadas en función de los objetivos de la investigación		✓			
2.5	**Bibliografía**					
2.5.1	Presenta la bibliografía pertinente al tema y la correspondiente a la metodología a la investigación.	✓				

2.6	**Anexos**					
2.6.1	Los anexos presentados son consistentes y contienen los datos más relevantes de la investigación	✓				
III	**Fundamentación y viabilidad del Modelo**					
3.1.	La fundamentación teórica y epistemológica del modelo guarda coherencia con el enfoque sistémico y la nueva ciencia.	✓				
3.2.	El modelo propuesto es coherente, pertinente y trascendente.	✓				
3.3.	El modelo propuesto es factible de aplicarse a otras organizaciones o instituciones.	✓				
IV	**Fundamentación y viabilidad de los Instrumentos**					
4.1.	La fundamentación teórica guarda relación con la operacionalización de la variable a evaluar.	✓				
4.2.	Los instrumentos son coherentes a la operacionalización de variables.	✓				
4.3.	Los instrumentos propuestos son factibles de aplicarse a otras organizaciones, grupos o instituciones de similares características de su población de estudio.	✓				

Mucho le voy a agradecer cualquier observación, sugerencia, propósito o recomendación sobre cualquiera de los propuestos. Por favor, refiéralas a continuación:

Después de haber revisado la propuesta y teniendo en cuenta los indicadores a evaluar, considero apto para su aplicación.

Validado por: Olga Cecilia Juárez Calderón

Especializado: Investigación

Categoría Docente: Auxiliar

Tiempo de Experiencia en Docencia Universitaria: 12 años

Cargo Actual: Docente

Fecha: Febrero 2018

DNI: 05645443

Anexo 6. CRITERIO DE EXPERTO 3

Estimado (a):...Robby oliver Gutierrez Gonzales...

Solicito apoyo de su sapiencia y excelencia profesional para que emita juicio de investigación Titulada: **Módulo didáctico de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden para mejorar las capacidades matemáticas en los estudiantes de ingeniería civil de la Universidad César Vallejo, Chiclayo – 2014,** que se presenta. Para alcanzar este objetivo se le ha seleccionado como experto (a) en la materia y necesito su valiosa opinión. Para ello debe marcar con una (X) en la columna que considere para cada indicador.

Evalúe cada aspecto con las siguientes categorías:

MA : Muy adecuado.
BA : Bastante adecuado.
A : Adecuado
PA : Poco adecuado
NA : No Adecuado

N°	Aspectos que deben ser evaluados	MA	BA	A	PA	NA
I.	**Redacción Científica**					
1.1	La redacción empleada es clara, precisas, concisa y debidamente organizada	✓				
1.2	Los términos utilizados son propios de la investigación científica	✓				
II.	**Lógica de la Investigación**					
2.1	**Problema de Estudio**					
2.2.1	Describe de forma clara y precisa la realidad problemática tratada	✓				
2.2.2	El problema se ha definido según estándares internaciones de la investigación científica	✓				
2.2	**Objetivos de la Investigación**					
2.2.1	Expresan con claridad la intencionalidad de la investigación	✓				
2.2.2	Guardan coherencia con el título, el problema, objeto campo de acción, supuestos y metodologías e instrumentos utilizados.	✓				
2.3	**Previsiones metodológicas**					
2.3.1	Se ha caracterizado la investigación según criterios pertinentes	✓				
2.3.2	Los escenarios y los participantes seleccionados son apropiados para los propósitos de la investigación	✓				
2.3.3	Presenta instrumentos apropiados para recolectar datos	✓				
2.3.4	Los métodos y técnicas empleadas en el tratamiento de la información son propios del tipo de la investigación planteada.	✓				
2.4	**Fundamentación teórica y epistemológica**					
2.4.1	Proporciona antecedentes relevantes a la investigación, como producto de la revisión de la bibliografía referida al modelo.	✓				
2.4.2	Proporciona sólidas bases teóricas y epistemológicas, sistematizadas en función de los objetivos de la investigación	✓				
2.5	**Bibliografía**					
2.5.1	Presenta la bibliografía pertinente al tema y la correspondiente a la metodología a la investigación.	✓				

2.6	**Anexos**					
2.6.1	Los anexos presentados son consistentes y contienen los datos más relevantes de la investigación	✓				
III	**Fundamentación y viabilidad del Modelo**					
3.1.	La fundamentación teórica y epistemológica del modelo guarda coherencia con el enfoque sistémico y la nueva ciencia.	✓				
3.2.	El modelo propuesto es coherente, pertinente y trascendente.	✓				
3.3.	El modelo propuesto es factible de aplicarse a otras organizaciones o instituciones.	✓				
IV	**Fundamentación y viabilidad de los Instrumentos**					
4.1.	La fundamentación teórica guarda relación con la operacionalización de la variable a evaluar.	✓				
4.2.	Los instrumentos son coherentes a la operacionalización de variables.	✓				
4.3.	Los instrumentos propuestos son factibles de aplicarse a otras organizaciones, grupos o instituciones de similares características de su población de estudio.	✓				

Mucho le voy a agradecer cualquier observación, sugerencia, propósito o recomendación sobre cualquiera de los propuestos. Por favor, refiéralas a continuación:

El instrumento cumple con los criterios mínimos, además la propuesta es coherente y es viable su aplicación.

Éxitos

Validado por: Dr. Robby Oliver Gutierrez Gonzales

Especializado: Investigación

Categoría Docente: Auxiliar

Tiempo de Experiencia en Docencia Universitaria: 16 años

Cargo Actual: Docente

Fecha: Febrero 2018

DNI: 32977568

Anexo 7. RESPUESTA A LA ENCUESTA

	item 1	item 2	item 3	item 4	item 5	item 6	item 7	item 8	item 9	item 10	item 11	item 12	item 13	item 14	item 15	item 16	item 17	item 18	item 19	item 20	item 21	item 22
1	1	1	0	1	1	2	1	2	2	2	2	2	2	2	1	1	1	1	1	2	1	0
2	2	2	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	1	1	1
3	0	2	0	0	1	0	0	1	1	1	0	2	2	1	1	2	1	1	0	0	0	0
4	2	2	2	2	2	2	1	2	1	2	1	2	2	1	2	2	1	2	2	2	1	1
5	2	1	1	1	1	2	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	1	1	2	1	1	1
6	2	1	0	1	1	1	1	1	1	2	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
7	1	1	1	0	1	1	1	1	2	0	1	1	1	2	1	1	1	0	1	1	1	1
8	1	2	2	2	2	1	1	1	2	0	1	2	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1
9	2	1	0	0	1	0	2	1	1	1	1	2	1	2	1	1	1	2	1	1	0	1
10	1	1	1	2	2	1	1	1	1	0	1	2	1	1	1	1	1	2	1	2	2	2
11	2	2	2	1	1	1	1	0	0	1	2	2	2	1	2	2	2	1	2	0	2	2
12	2	2	1	1	1	0	1	0	0	0	0	1	1	0	1	1	2	1	1	0	0	0
13	1	2	2	1	1	1	2	0	0	0	0	1	2	0	1	0	0	0	0	0	2	2
14	1	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0
15	0	0	1	1	1	2	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	1	1	1	1	1	1
16	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	1	0	0	1	1	1
17	0	0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	0	1	1	2	1	1	1	0	0
18	0	1	1	0	1	1	0	0	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	0	0	0
19	0	0	1	0	1	1	1	0	0	1	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
20	1	2	0	0	1	2	1	0	0	1	1	1	2	1	1	1	0	0	0	1	0	1

Anexo 8. RESPUESTA A LA ENCUESTA POR CAPACIDADES

Matematizar

	Siempre	A veces	Nunca	Puntaje	Porcentaje
1	7	8	5	22	0.5
2	8	9	3	25	0.56818182
3	4	10	6	18	0.40909091
4	4	8	8	16	0.36363636

Representar

	Siempre	A veces	Nunca	Puntaje	Porcentaje
5	4	14	2	22	0.5
6	6	8	6	20	0.45454545
7	3	12	5	18	0.40909091

Comunicar

	Siempre	A veces	Nunca	Puntaje	Porcentaje
8	3	10	7	16	0.36363636
9	4	9	7	17	0.38636364
10	4	10	6	18	0.40909091
11	4	11	5	19	0.43181818

Elaborar estrategias

	Siempre	A veces	Nunca	Puntaje	Porcentaje
12	8	9	3	25	0.56818182
13	8	8	4	24	0.54545455
14	5	11	4	21	0.47727273

Utiliza expresiones simbólcas

	Siempre	A veces	Nunca	Puntaje	Porcentaje
15	4	12	4	20	0.45454545
16	5	11	4	21	0.47727273
17	4	12	4	20	0.45454545
18	4	10	6	18	0.40909091
19	4	10	6	18	0.40909091

Argumentar

	Siempre	A veces	Nunca	Puntaje	Porcentaje
20	3	10	7	16	0.36363636
21	3	9	8	15	0.34090909
22	3	10	7	16	0.36363636

Anexo 9. COEFICIENTE ALFA DE CRONBACH

Al aplicar el coeficiente Alfa de Cronbach para determinar la fiabilidad del instrumento, se logró probar que el instrumento es altamente confiable (0.911).

Estadísticos de fiabilidad

Alfa de Cronbach	N de elementos
,911	22

Estadísticos total-elemento

	Media de la escala si se elimina el elemento	Varianza de la escala si se elimina el elemento	Correlación elemento-total corregida	Alfa de Cronbach si se elimina el elemento
VAR00001	20,1500	74,871	,638	,904
VAR00002	20,0000	78,316	,423	,909
VAR00003	20,3500	80,661	,234	,913
VAR00004	20,4500	74,471	,690	,903
VAR00005	20,1500	78,345	,567	,906
VAR00006	20,2500	77,145	,460	,909
VAR00007	20,3500	78,239	,489	,908
VAR00008	20,4500	76,682	,577	,906
VAR00009	20,4000	77,305	,484	,908
VAR00010	20,3500	78,766	,386	,910
VAR00011	20,3000	76,747	,580	,906
VAR00012	20,0000	75,158	,686	,903
VAR00013	20,0500	75,103	,639	,904
VAR00014	20,2000	78,695	,413	,909
VAR00015	20,2500	75,776	,708	,903
VAR00016	20,2000	76,484	,603	,905
VAR00017	20,2500	79,145	,401	,909
VAR00018	20,3500	75,818	,629	,905
VAR00019	20,3500	74,345	,754	,902
VAR00020	20,4500	77,208	,532	,907
VAR00021	20,5000	77,316	,506	,907
VAR00022	20,4500	78,366	,434	,909

Anexo 10. SÍLABO DE MATEMÁTICA III

I. DATOS GENERALES

1.1 Unidad Académica:	Ingeniería Civil.
1.2 Semestre Académico:	2014-2
1.3 Ciclo de estudios:	III
1.4 Requisitos:	MATEMÁTICA II
1.5 Carácter:	OBLIGATORIO
1.6 Número de Créditos:	04
1.7 Duración:	17 SEMANAS
1.8 Nº de horas semanales:	05
1.9 Docente(s):	Mat. Angela Alvarez de Nieves avac_137@hotmail.com

II. SUMILLA

Matemática III es una experiencia curricular del área de Formación Profesional. Es de naturaleza teórico práctica y de carácter obligatorio. Tiene como propósito desarrollar en los estudiantes la capacidad para formular y aplicar modelos matemáticos en Ingeniería Civil. Contiene regiones en el plano, integrales dobles, triples y sus aplicaciones, ecuaciones diferenciales ordinarias y la Transformada de Laplace.

III. COMPETENCIA

Aplica las herramientas del análisis matemático para resolver y modelar problemas propios de la especialidad donde se apliquen integrales dobles, triples, ecuaciones diferenciales ordinarias y la Transformada de Laplace, demostrando orden, claridad y precisión en el manejo de la información

IV. PROGRAMACIÓN ACADÉMICA: Se desarrollará en tres unidades:

I Unidad: Ecuaciones diferenciales ordinarias y sus aplicaciones

II Unidad: Series de Potencia y sus aplicaciones

III Unidad: Transformada de Laplace y aplicaciones.

EJES TRANSVERSALES

- Derechos humanos
- Cultura ambiental,
- Diversidad e identidad cultural
- Gestión de riesgos
- Emprendedorismo

4.1 PRIMERA UNIDAD: ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS Y SUS APLICACIONES

4.1.1. DURACIÓN: 06 semanas del 25 de Agosto al 04 de Octubre.

4.1.2. PROGRAMACIÓN

SESIÓN	CAPACIDADES	TEMÁTICA	PRODUCTOS ACADÉMICOS
1 **26/08/14**	-Conoce los contenidos del silabo. -Identifica y discrimina las Ecuaciones Diferenciales según su grado, orden y según el tipo de derivada utilizada: ordinaria y parcial.	-Presentación del sílabo. -Prueba de entrada. -Definiciones y terminología. -Problemas de valor inicial. -Las ecuaciones diferenciales como modelos matemáticos.	- Prueba de entrada
2 **02/09/14**	Identifica, discrimina y resuelve diferentes tipos de ecuaciones diferenciales ordinarias con sus respectivas aplicaciones.	Ecuaciones diferenciales de primer orden: -Ecuaciones separables -Ecuaciones exactas. - Factores integrantes Aplicaciones de las ecuaciones diferenciales de primer orden: -Trayectorias ortogonales. -Problemas de enfriamiento -Desintegración de sustancias radiactivas. -Crecimiento de poblaciones.	- Trabajo Académico
3 **09/09/14**	Identifica, discrimina y resuelve diferentes tipos de ecuaciones diferenciales lineales con sus respectivas aplicaciones.	-Ecuaciones lineales. -Cambios de variables. -La ecuación de Bernoulli. -Ecuaciones con coeficientes lineales. -Aplicaciones de las ecuaciones diferenciales lineales : -Mecánica Newtoniana. -Problemas de mezclas.	- Trabajo Académico. - Practica calificada

		- Ley de Torricelli.	
4 **16/09/14**	Identifica, discrimina y resuelve diferentes tipos de ecuaciones diferenciales de segundo orden.	-Ecuaciones lineales de segundo orden y de orden superior: -Ecuaciones lineales de segundo orden. -Ecuaciones lineales no homogéneas. -Ecuaciones de Cauchy-Euler.	- Trabajo Académico. - Actitudes
5 **23/09/14**	Modela y resuelve problemas de su entorno haciendo uso de las Ecuaciones Diferenciales ordinarias de Primer Orden	-Aplicaciones de las ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden: -Vibraciones mecánicas. -Circuitos eléctricos.	- Practica calificada. - Trabajo Académico
6 **30/09/14**	Responde a interrogantes planteadas en relación a los temas de unidad.	Presentación y Exposición del Informe de la Unidad I. Evaluación de la Unidad I.	-Informe de Unidad I -Evaluación de Comprensión de Lectura.

4.2. SEGUNDA UNIDAD: SERIES DE POTENCIA Y SUS APLICACIONES

4.2.1. DURACIÓN: 05 semanas del 06 de octubre al 08 de Noviembre.

4.2.2. PROGRAMACIÓN

SESIÓN	CAPACIDADES	TEMÁTICA	PRODUCTOS ACADÉMICOS
7 **07/10/14**	-Obtiene la serie de Taylor de una función diferenciable. -Analiza la convergencia de una serie de potencia	-Series de Potencia -Series de Taylor -Criterios de convergencia	-Practica calificada
8 **14/10/14**	-Resuelve una ecuación diferencial usando una serie de potencia alrededor de un punto ordinario o regular.	-Soluciones en serie de potencia en torno a puntos ordinarios y en torno a puntos regulares	- Trabajo académico. - Practica calificada
9 **21/10/14**	-Identifica y resuelve las ecuaciones de Legendre y de Bessel. -Emplea las funciones de Bessel en problemas de aplicación.	Ecuación de Legendre. Ecuación de Bessel. Funciones de Bessel de primera clase. Funciones de Bessel de segunda clase	-Trabajo académico -Actitudes
10 28/10/14	-Resuelve aplicaciones físicas haciendo uso de las series trigonométricas y las funciones periódicas.	-Funciones periódica. -Serie trigonométrica. -Fórmulas de Euler. -Aplicaciones físicas	-Trabajo académico. - Practica calificada

11 **04/11/14**	Responde a interrogantes planteadas en relación a los temas de Unidad II.	Evaluación Parcial de II Unidad.	-Exposición de la Unidad II -Examen Parcial

4.3. TERCERA UNIDAD: TRANSFORMADA DE LAPLACE Y SUS APLICACIONES.

4.3.1. DURACIÓN: 06 semanas del 10 de noviembre al 20 de diciembre.

4.3.2. PROGRAMACIÓN

SESIÓN	CAPACIDADES	TEMÁTICA	PRODUCTOS ACADÉMICOS
12 **11/11/14**	Construye herramientas matemáticas que luego utilizará para resolver ecuaciones diferenciales.	-Definición y ejemplos de la transformada de Laplace. -Propiedades adicionales de las transformadas de Laplace.	-Practica calificada
13 **18/11/14**	Aplica la Transformada de Laplace en la solución de Ecuaciones Diferenciales.	-La función Gamma. -La función salto unidad de Heaviside. -Funciones impulso y la función delta de Dirac. -Aplicación de las transformadas de Laplace a Ecuaciones Diferenciales.	-Trabajo académico -Practica calificada
14 **25/11/14**	Construye herramientas matemáticas que luego utilizará para resolver ecuaciones diferenciales.	-Transformadas inversas de Laplace. -Aplicaciones a problemas físicos y biológicos. -Aplicaciones a circuitos eléctricos.	-Trabajo académico -Actitudes
15 **02/12/14**	-Plantea y resuelve modelos matemáticos obtenidos a partir de la observación de problemas de las distintas áreas del conocimiento.	-Sistemas de ecuaciones diferenciales. -Método de eliminación para resolver sistemas de ecuaciones diferenciales. --Soluciones de sistemas no lineales de ecuaciones diferenciales ordinarias.	- Trabajo académico - Practica calificada
16 **09/12/14**	Responde a interrogantes planteadas en relación a los temas de la Unidad III.	Evaluación Final	- Exposición de la Unidad III - Examen Final
17 **16/12/14**		Examen de rezagados y aplazado	Examen

4.5. ACTITUDES:

- Participa de manera coherente
- Demuestra interés al conocer los momentos de la sesión de aprendizaje
- Interactúa con sus compañeros, respetando sus individualidades
- Acepta la crítica como parte de su mejoramiento personal.

V. ESTRATEGIAS METODOLÓGICAS

- Presentación del Trabajo individual e Informe de Unidad
- Trabajo en equipo.
- Exposición de trabajos
- Lluvia de ideas
- Participación activa en el desarrollo de las sesiones.

VI. MEDIOS Y MATERIALES

- Documentos impresos: separatas, folletos, libros, tesis entre otros.
- Material audiovisual en informático: videos, CD, recursos electrónicos.
- Equipos: proyector multimedia.
- Materiales diversos: paleógrafos, plumones, etc.

VII. EVALUACIÓN

La evaluación es un proceso integral, continuo, dinámico y sistemático, enfocado hacia los cambios de las conductas y rendimientos, mediante la cual verificamos el logro de las capacidades y competencia propuestas.

La Evaluación adquiere sentido en la medida que comprueba la eficacia y posibilita el perfeccionamiento de la acción docente. Lo que destaca un elemento clave de la concepción actual de la evaluación: no evaluar por evaluar, sino para mejorar los programas, la organización de las tareas y la transferencia a una más eficiente selección.

7.1. DISEÑO DE EVALUACIÓN

UNIDADES	PRODUCTOS ACADÉMICOS	CÓDIGO	PESO	%	INSTRUMENTO DE EVALUACIÓN
I	Práctica calificada y Trabajo Académico	**PC**	15%	20%	Prueba de desarrollo Presentación del trabajo
	Informe	**IN**	15%		Matriz de evaluación
	Actitudes	**AC**	10%		Escala de actitudes
	Comprensión de lectura	**CL**	60%		Prueba de desarrollo
II	Práctica calificada y Trabajo Académico	**PC**	15%	30%	Prueba de desarrollo Presentación del trabajo
	Informe	**IN**	15%		Matriz de evaluación
	Actitudes	**AC**	10%		Escala de actitudes
	Examen Parcial	**EP**	60%		Prueba de desarrollo
III	Práctica calificada y Trabajo Académico	**PC**	15%	50%	Prueba de desarrollo Presentación del Trabajo
	Informe	**IN**	15%		Matriz de evaluación
	Actitudes	**AC**	10%		Escala de actitudes
	Examen Final	**EF**	60%		Prueba de desarrollo

7.2. PROMEDIOS

PRIMERA UNIDAD (X1)	SEGUNDA UNIDAD (X2)	TERCERA UNIDAD (X3)
$X_1 = 0.15 * PC + 0.15 * IN + 0.1 * AC + 0.6 * CL$	$X_2 = 0.15 * PC + 0.15 * IN + 0.1 * AC + 0.6 * EP$	$X_3 = 0.15 * PC + 0.15 * IN + 0.1 * AC + 0.6 * EF$

FINAL (XF)
$XF = 0.2 * X_1 + 0.3 * X_2 + 0.5 * X_3$

7.3. REQUISITOS DE APROBACIÓN

Los estudiantes deben tener en cuenta lo siguiente:

- La nota mínima aprobatoria es 10.5 y el redondeo se hace para calcular el promedio final.
- Los trabajos se deben presentar en la fecha y hora que se indique. No se recibirán después del plazo fijado
- La asistencia mínima aceptable es de 70% y se contabilizan faltas justificadas e injustificadas. En caso contrario se desaprueba por límite de faltas.
- Una vez iniciada la clase, NO EXISTE tolerancia de ingreso. El alumno NO está obligado a esperar al profesor y en caso de tardanza o de falta de éste, deberá comunicarlo inmediatamente a la Dirección de Escuela.
- Es condición para dar los exámenes estar registrado oficialmente como estudiante del curso
- Para efectos de exposición los estudiantes deben solicitar los equipos pertinentes y en caso de tardanza o ausencia de equipos, la evaluación afectaría a toda la clase. La presentación personal para la sustentación debe ser la adecuada.
- El uso del Aula virtual y de la Biblioteca Virtual es obligatorio y constituye un factor de evaluación durante todo el semestre.
- El 30% de inasistencias INHABILITA automáticamente al estudiante del curso. La justificación de una inasistencia será únicamente con certificado médico y se realizará a través de la Dirección de Escuela, como máximo, hasta 7 días después de la inasistencia.
- Para la evaluación final del curso se consideran los criterios expresados en la Matriz de Evaluación respectiva.

VIII. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Código de biblioteca	TEXTO
515/A62/t2	Anton, H. & otros (2009) **Cálculo multivariable**, 2ª edición, Limusa Wiley. México
515.35/B77	Boyce,W. y Di Prima, R. (2010) Ecuaciones diferenciales, Limusa Wiley: México

515/K81	Kreyzig, (2010) Matemáticas avanzadas para ingeniería, 3ª edición. Limusa Wiley ´: México
515.15/L25/T2	Larson, R. – Edwards, B. H. (2010) **Cálculo 2 de varias variables**, 9ª edición: México, McGraw Hill

Mat. Angela Alvarez de Nieves
Profesora de la Escuela Académico Profesional de Ingeniería Civil
Chiclayo, Agosto del 2014

Anexo 11. MÓDULO DE ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS DE PRIMER ORDEN

UCV
UNIVERSIDAD
CÉSAR VALLEJO

Módulo de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden

Angela Alvarez de Nieves

Chiclayo 2018

I N T R O D U C C I Ó N

El curso de Matemática III, nos permite conocer aspectos relacionados con las ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden (edo), sus métodos de solución y sus aplicaciones para resolver problemas del mundo real.

Estimados estudiantes de la Escuela Académico Profesional de Ingeniería Civil, bienvenidos a la experiencia curricular de Matemática III y es realmente grato compartir con ustedes este proceso de enseñanza - aprendizaje, que servirá para enriquecer su formación profesional y su contacto con el campo de acción.

El curso de Matemática III, es una asignatura del área de Formación Profesional. Es de naturaleza teórico práctica y de carácter obligatorio. Tiene como propósito brindar herramientas básicas de las matemáticas que le permitan al estudiante potenciar sus capacidades de interpretación de datos y análisis de soluciones matemáticas a situaciones reales propias de la especialidad de ingeniería civil y se desarrolla a través de tres unidades: Ecuaciones diferenciales ordinarias y aplicaciones, Series de potencias – Transformada de Laplace y aplicaciones, Transformada inversa de Laplace – Ecuaciones diferenciales parciales y aplicaciones.

En muchas situaciones de la vida real nos enfrentamos a problemas en las cuales se conoce la tasa – ritmo o variación – en la cual una cantidad crece o decrece, o bien nos dan la rapidez a la que un objeto se calienta o enfría, etc., y en general todas aquellas situaciones en las que nos proporcionan información acerca de la rapidez con que cambia una función, que se representan mediante ecuaciones matemáticas en las que se utilizan derivadas. Estas ecuaciones se conocen con el nombre de ecuaciones diferenciales.

En este módulo estudiaremos algunas ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden, a saber: ecuaciones diferenciales de variable separable, lineal de primer orden, exacta y homogénea. Primero establecemos la estrategia de solución de cada una de ellas y luego las aplicamos a ciertos problemas relacionados con la biología, química y física.

En la resolución de problemas que utilizan las ecuaciones diferenciales de primer orden como modelo matemático, se usará el método de Polya con la finalidad de lograr desarrollar las capacidades matemáticas de matematizar, representar, comunicar, elaborar estrategias, utilizar símbolos matemáticos y argumentar.

Tu docente

Capacidades

- Matematizar: Implica expresar una parte de la realidad, un contexto concreto o una situación problemática, definida en el mundo real, en términos matemáticos.
- Representar: Se refiere a la representación matemática de los objetos.
- Comunicar: Implica utilizar el lenguaje matemático como una herramienta que nos permite comunicarnos con los demás a través de diferentes formas de expresión y comunicación.
- Elaborar estrategias: Se refiere a la selección o elaboración de una estrategia para guiar el trabajo, interpretar, evaluar y validar su procedimiento y solución matemáticos.
- Utilizar expresiones simbólicas: Implica el uso de las diferentes expresiones y símbolos matemáticos que ayudan a la comprensión de las ideas matemáticas, construir conocimiento y resolver problemas matemáticos.
- Argumentar: Implica organizar, plantear secuencias, formular conjeturas y corroborarlas, establecer conceptos, juicios y razonamientos que den sustento lógico al procedimiento de resolver problemas.

Programación de Contenidos

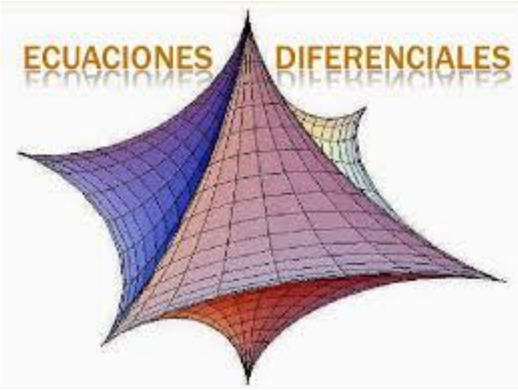
ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS DE PRIMER ORDEN Y APLICACIONES

Contenidos

Tema 01: Definiciones y terminología. Modelos matemáticos	Semana 01
Tema 02: Ecuaciones de variables separables. Aplicaciones	Semana 02
Tema 03: Ecuaciones lineales. Aplicaciones	Semana 03
Tema 04: Ecuaciones exactas. Aplicaciones	Semana 04
Tema 05: Ecuaciones homogéneas. Aplicaciones	Semana 05
Primer examen parcial	Semana 06

Tema 01: Definiciones y terminología. Modelos matemáticos

Imagen tomada de la word wide web



¿Qué se entiende por ecuación diferencial ordinaria y solución de la misma?

…………………………………………………………………
…………………………………………………………………
…………………………………………………………………
…………………………………………………………………
…………………………………………………………………
…………………………………………………………………
…………………………………………………………………

1.1 Introducción

Estimado estudiante iniciaremos el módulo de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden con la introducción de conceptos que servirán de base para el estudio posterior. En este primer tema se presentan la definición de ecuación diferencial ordinaria de primer orden, solución de una ecuación diferencial ordinaria, representación geométricas de la misma, problemas de valor inicial. Luego se formulan algunos modelos matemáticos basados en ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden.

1.2 Fundamentos teóricos

1.2.1 Definición de ecuación diferencial

Una ecuación que contiene derivadas de una o más variables respecto a una o más variables independientes, se dice que es una ecuación diferencial (ed)

Ejemplo 1

Las siguientes ecuaciones

$$\frac{dy}{dx} + 5y = e^x$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} + 6y = 0$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 2\frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

Son ecuaciones diferenciales porque son ecuaciones que contienen derivadas de una o más variables respecto a una o más variables independientes.

Si una ecuación diferencial contiene sólo derivadas de una variable dependiente respecto a una sola variable independiente se dice que es una **ecuación diferencial ordinaria** (edo).

Ejemplo 2

Las ecuaciones

$$\frac{dy}{dx} + 5y = e^x$$

$$\frac{dy}{dx} - 2x = 0$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} + 6y = 0$$

Son ecuaciones diferenciales ordinarias porque en la ecuación intervienen solamente derivadas ordinarias.

Ejemplo 3

Las ecuaciones

$$k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t},\ k > 0$$

$$a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

No son ecuaciones diferenciales ordinarias porque en ellas intervienen derivadas parciales.

Además, si la edo contiene solamente la derivada de primer orden se dice que es una **ecuación diferencial ordinaria de primer orden**

Ejemplo 4

Las ecuaciones

$\frac{dy}{dx} + 5y = e^x$

$\frac{dy}{dx} - 2x = 0$

$\frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{x-y}$

Son ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden porque en ellas intervienen solamente derivadas de primer orden. En cambio las ecuaciones diferenciales ordinarias

$\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} + 6y = 0$

$\frac{d^3y}{dx^3} - 2x = 0$

No son de primer orden porque la derivada de mayor orden que interviene en ellas es mayor a uno.

En general, una ecuación diferencial ordinaria de primer orden se expresa simbólicamente como

$$F(x, y, y') = 0 \qquad (1)$$

donde F es uan función de valor real de 3 variables: x, y, y'.

Por razones prácticas y teóricas se supone que de la forma general se puede despejar la derivada, de tal manera que se obtenga

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \qquad (2)$$

conocida como la forma normal de (1). La ecuación diferencial ordinaria de primer orden también se puede escribir usando diferenciales en la forma

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

Observación

Es común usar la letra y para indicar la variable dependiente y la letra x para la variable independiente. Sin embargo se pueden usar otras letras como por ejemplo u, v, z para la variable dependiente y las letras s, t para la variable independiente

Ejemplo 5

$\frac{dy}{dx} + 3y = e^x$. Es una edo de primer orden donde y es la variable dependiente, x la variable independiente.

$\frac{dz}{dt} = 5zt$. Es una edo de primer orden con z como variable dependiente, t variable independiente

$\frac{dy}{ds} = y\, cos\, s$. Es una edo de primer orden donde y es variable dependiente, s variable independiente.

$7xydx - (4y + x^2)dy = 0$. También es una edo de primer orden donde se puede considerar a x como variable independiente y a y como variable dependiente.

1.2.2 Solución de una edo

Cualquier función φ definida en un intervalo I y que tiene derivada continua en I, la cual cuando se sustituye en la edo de primer orden reduce la ecuación a una identidad, se dice que es una solución de la ecuación en el intervalo.

Ejemplo 6

La función $y = e^{5x}$ es una solución de la ecuación diferencial $2\frac{dy}{dx} = 10y$.

Una forma de verificar que una función dada es una solución, es ver, una vez que se ha sustituido, si cada lado de la ecuación es el mismo para todo x en el intervalo.

Lado izquierdo: $2\frac{dy}{dx} = 2\left(\frac{d}{dx}e^{5x}\right) = 10e^{5x}$

Lado derecho: $10y = 10(e^{5x}) = 10e^{5x}$

Se observa que ambos lados son iguales para todo número real x, luego se tiene una identidad. Por lo tanto la función dada es una solución de la edo de primer orden.

Ejemplo 7

La función $y = x^2$ es una solución de la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = 2x$.

Lado izquierdo: $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x^2) = 2x$

Lado derecho: $2x$

Por lo tanto la función dada es una solución de la edo de primer orden.

Ejemplo 8

La función $y = xe^{2x}$ es una solución de la ecuación diferencial

$$y' - 2y = e^{2x}$$

Como $y' = \frac{d}{dx}(xe^{2x}) = e^{2x} + 2xe^{2x}$, tenemos que para todo número real x

Lado izquierdo: $y' - 2y = (e^{2x} + 2xe^{2x}) - 2xe^{2x} = e^{2x}$

Lado derecho: e^{2x}

Luego $y = xe^{2x}$ es una solución de la ecuación diferencial.

La gráfica de una solución $y = \phi(x)$ de una ecuación diferencial ordinaria en el intervalo de definición I se llama **curva solución.**

En los ejemplos presentados, la función solución dada depende explícitamente de x. En este caso la solución se llama **solución explícita**.

Ejemplo 9

La relación $x^2 + y^2 = 25$ es una solución de la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}, \quad en \quad (-5, 5)$$

Solución.

Por derivación implícita se obtiene

$\frac{d}{dx}(x^2) + \frac{d}{dx}(y^2) = \frac{d}{dx}(25) \quad \rightarrow \quad 2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0$. Luego, despejando $\frac{dy}{dx}$, la edo de primer orden es: $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$

En este caso la relación $x^2 + y^2 = 25$ define una **solución implícita** de la edo de primer orden.

Familia de soluciones

En el cálculo integral, al evaluar una integral indefinida se emplea una sola constante c de integración. En forma similar, al resolver una edo de primer orden $F(x, y, y') = 0$, en general se obtiene una solución con una sola constante arbitraria o parámetro c. Una solución con una constante arbitraria representa un conjunto de soluciones $G(x, y, c) = 0$ y se llama **familia de soluciones uniparamétricas.**

Esto quiere decir que una edo de primer orden puede tener una cantidad infinita de soluciones que corresponde a las elecciones ilimitadas del parámetro. Una solución de una edo de primer orden sin parámetro se llama **solución particular**.

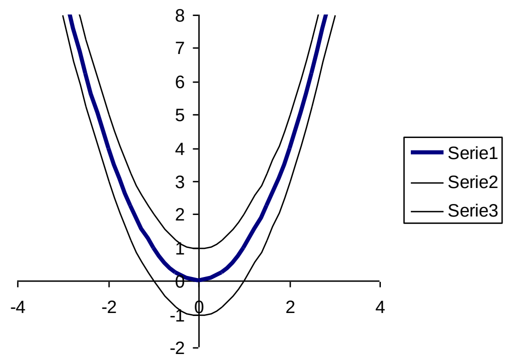
En varios textos, esta familia de soluciones uniparamétricas se le llama solución general y la solución que no se obtiene a partir de ella se denomina solución singular.

Ejemplo 10

$y = x^2 + c$ es una familia de soluciones uniparamétricas de la edo de primer orden

$$\frac{dy}{dx} = 2x$$

En tanto que, para $c = 0$, la función $y = x^2$ es una solución particular de la misma edo.



1.2.3 Problema de valor inicial (PVI)

En muchos problemas existe la necesidad de resolver una edo de primer orden sujeta a una condición prescrita, que es la condición que se imponen a la función incógnita $y = \varphi(x)$.

En algún intervalo I que contenga a x_0, el problema

Resolver: $\frac{dy}{dx} = f(x, y, y')$

Sujeta a: $y(x_0) = y_0$

y_0 es constante real especificada, se llama problema de valor inicial (PVI). El valor dado $y(x_0) = y_0$ se llama condición inicial (CI).

Ejemplo 11

$$2\frac{dy}{dx} - 10y = 0 \qquad \text{EDO}$$

$$y(0) = 1 \qquad \text{CI}$$

Es un problema de valor inicial o PVI.

Una función $y = \varphi(x)$ es **solución de un PVI** si es una solución de la ecuación diferencial de primer orden y además satisface la condición inicial, es decir, $y_0 = \varphi(x_0)$.

Ejemplo 12

La función $y = e^{5x}$ es solución del PVI

$$2\frac{dy}{dx} - 10y = 0$$

$$y(0) = 1$$

Porque es una solución de la ecuación diferencial y además satisface la condición inicial, puesto que

$$y(0) = e^{5(0)} = e^0 = 1$$

1.2.4 Modelos matemáticos con ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden

Con frecuencia se desea describir en términos matemáticos el comportamiento de algunos sistemas o fenómenos de la vida real. La descripción matemática de un sistema de fenómenos se llama modelo matemático y se construye con ciertos objetivos. Con este fin se introduce la idea de una ecuación diferencial ordinaria de primer orden como un modelo matemático y se analizan algunos modelos específicos.

En general, los modelos matemáticos se acompañan de condiciones que los definen, en otras palabras, un modelo matemático puede consistir en un problema de valor inicial.

Dinámica poblacional (Ley de Malthus)

En este caso se considera que la tasa de crecimiento de la población de un país en un cierto tiempo t es proporcional a la población total, P (t), de ese país en cualquier momento t. Esta suposición se puede expresar matemáticamente como

$$\frac{dP}{dt} = kP$$

donde k es una constante de proporcionalidad.

Decaimiento radiactivo

Se considera que la tasa con que los núcleos de una sustancia se desintegra (decaen) es proporcional a la cantidad (con más precisión, el número de núcleos) A(t) de sustancia que queda al tiempo t. Esta suposición se puede expresar como

$$\frac{dA}{dt} = kA$$

donde k es una constante de proporcionalidad. Si $k > 0$ existe un crecimiento y si $k < 0$ se produce una desintegración.

Ley de enfriamiento/calentamiento de Newton

La razón con que cambia la temperatura de un objeto es proporcional a la diferencia entre su temperatura y la del medio que le rodea, que es la temperatura ambiente.

Sea T(t) la temperatura del objeto en el tiempo t y Tm la temperatura constante del medio que le rodea, entonces la ley de Newton traducida a una expresión matemática es

$$\frac{dT}{dt} = k(T - T_m)$$

En ambos casos, enfriamiento o calentamiento, si T_m es una constante, se establece que $k < 0$

Mezclas

Al mezclar dos soluciones salinas de distintas concentraciones da lugar a una ecuación diferencial de primer orden, que define la cantidad de sal contenida en la mezcla.

Considere un tanque que contiene una solución salina y dos llaves: una para bombear solución salina a una velocidad y otra por donde sale la mezcla a una velocidad determinada. ¿Cómo varía la cantidad de sal en la solución salida que queda en el tanque?

La razón en que varía la cantidad de sal en el depósito es la razón neta, es decir, es igual a la diferencia entre la razón de entrada de la sal y la razón de salida de la sal.

Si $A(t)$ es la cantidad de sal en el tanque en el tiempo t , $R_{entrada}\ \ y\ \ R_{salida}$ la razón de entrada de la sal y la razón de salida de la misma, respectivamente, entonces la razón con la que $A(t)$ cambia es

$$\frac{dA}{dt} = (razón\ de\ entrada\ de\ la\ sal) - (razón\ de\ salida) = R_{entrada} - R_{salida}$$

1.3 Actividades

1. Identifica las ecuaciones diferenciales que son diferentes a una ecuación diferencial ordinaria de primer orden.

a) $xy\dfrac{d^2y}{dx^2}+\dfrac{dy}{dx}=sen\,x$ b) $2xdx+2ydy=(x^2-y)dx$ c) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=3\dfrac{\partial u}{\partial t}$

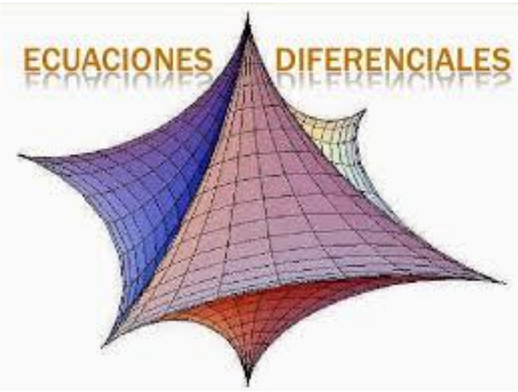
d) $e^t\dfrac{dy}{dt}-y=t^2$ e) $(x+y^2)dy-2dx=xdx$ f) $2dx-e^{3x}dy=0$

2. Averigua de que PVI es solución la función $y = x\,sen\,x$

a) $\begin{cases} x\dfrac{dy}{dx}+y=x\cos x \\ y(0)=0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x\dfrac{dy}{dx}+y=-x\cos x \\ y(0)=0 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x\dfrac{dy}{dx}-y=x^2\cos x \\ y(0)=0 \end{cases}$

Tema 02: Ecuaciones diferenciales de variables separables. Aplicaciones

Imagen tomada de la word wide web



¿Qué se entiende por ecuación diferencial ordinaria de variables separables?

………………………………………………………………

………………………………………………………………

………………………………………………………………

………………………………………………………………

………………………………………………………………

………………………………………………………………

……………………………………………………………

2.1 Introducción

Estimado estudiante continuando con nuestro módulo de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden, prestaremos atención a los métodos de solución de alguna de dichas ecuaciones. Comenzamos con las ecuaciones diferenciales de primer orden conocidas como ecuaciones de variables separables y su aplicación a problemas de dinámica poblacional. Para resolver los problemas de aplicación hacemos uso del método de George Polya que consiste de cuatro fases: Comprender el problema, concebir un plan, ejecución del plan y examinar la solución obtenida (visión retrospectiva).

2.2 Fundamentos teóricos

2.2.1 Ecuaciones diferenciales de variables separables

La edo

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

es de variables separables si la ecuación se puede escribir en la forma

$$\frac{dy}{dx} = g(x).h(y)$$

donde el segundo miembro de la ecuación es el producto de una función que depende solamente de x y otra función que depende exclusivamente de y.

Ejemplo 1

La edo de primer orden

$$\frac{dy}{dx} = y^3 x^2 e^{2x+3y}$$

es de variables separables porque el segundo miembro se puede escribir, por agrupación de términos, como

$$f(x,y) = y^3 x^2 e^{2x+3y} = (x^2 e^{2x})(y^3 e^{3y}) = g(x)h(y)$$

En cambio, la edo de primer orden

$$\frac{dy}{dx} = x + e^{2y}$$

no es de variables separables porque el segundo miembro no se puede factorizar como un producto de una función de x por una función de y

2.2.2 Estrategia para resolver ecuaciones diferenciales de variables separables

Solución de una edo de primer orden de variables separables

Paso 1. Separación de variables

Se utiliza las leyes del álgebra para agrupar a las expresiones que dependen de la variable x con el dx en el lado derecho de la igualdad y las expresiones que dependen de la variable y junto con el dy en el lado izquierdo, es decir, hay que transformar la ecuación original a la forma $p(y)dy = g(x)dx$

Paso 2. Una vez que la ecuación se ha transformado a la forma $p(y)dy = g(x)dx$ se integra ambos lados de la ecuación.

Ejemplo 2

Resuelva la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2}{2}$$

Solución

Como se puede observar, esta ecuación diferencial es de variables separables

Paso 1: Separar variables

$$2dy = 3x^2 dx$$

Paso 2: Integrar ambos miembros de la ecuación

$$\int 2dy = \int 3x^2 dx$$

$$2y = x^3 + C$$

Luego, la familia de soluciones uniparamétricas de la ecuación es

$$y = \frac{x^3}{2} + C$$

Ejemplo 3

Resuelva la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = y(3x^2 - x)$$

Solución

Como el segundo miembro de la ecuación diferencial es el producto de una función que depende de x y una función que depende de y, la ecuación diferencial es de variables separables

Paso 1: Separar variables

Si $y \neq 0$, entonces

$$\frac{1}{y}dy = (3x^2 - x)dx$$

Paso 2: Integrar ambos miembros de la ecuación

$$\int \frac{1}{y}dy = \int (3x^2 - 2x)dx$$

$$ln|y| = x^3 - x^2 + C$$

$$|y| = e^{x^3-x^2+C} = e^C e^{x^3-x^2}$$

$$y = Ke^{x^3-x^2}$$

Donde $K = e^C$

Luego, la familia de soluciones uniparamétricas de la ecuación es

$$y = Ke^{x^3-x^2}$$

Observe que $y = 0$, también satisface la ecuación diferencial, luego es una solución. Sin embargo esta solución no se puede obtener a partir de la familia de soluciones uniparamétricas y por esta razón es una solución singular.

Ejemplo 4

Resuelva la ecuación diferencial

$$y' = y^2 e^{-x}$$

Solución

La ecuación diferencial es de variables separables

Paso 1: Separar variables

Si $y \neq 0$, entonces

$$\frac{1}{y^2}dy = e^{-x}dx$$

Paso 2: Integrar ambos miembros de la ecuación

$$\int \frac{1}{y^2}dy = \int e^{-x}dx$$

$$-\frac{1}{y} = -e^{-x} + C$$

Luego, la familia de soluciones uniparamétricas de la ecuación es dada por

$$y = \frac{1}{e^{-x} - C}$$

Observe que $y = 0$, también satisface la ecuación diferencial, luego es una solución. Sin embargo esta solución no se puede obtener a partir de la familia de soluciones uniparamétricas y por esta razón es una solución singular.

Las familias de soluciones uniparamétricas de las edo de primer orden en los ejemplos anteriores están dadas en **forma explícita** porque la variable y está expresada en términos de x

Ejemplo 5

Resuelva la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2}{2y}$$

Solución

Esta ecuación diferencial es de variables separables

Paso 1: Separar variables

$$2ydy = 3x^2dx$$

Paso 2: Integrar ambos miembros de la ecuación

$$\int 2ydy = \int 3x^2dx$$

$$y^2 = x^3 + C$$

Luego, la familia de soluciones uniparamétricas de la ecuación es

$$y^2 = x^3 + C$$

Ejemplo 6

Resuelva la ecuación diferencial

$$e^y y' - x + 1 = 0$$

Solución

Considerando $y' = \frac{dy}{dx}$, la edo se puede reescribir como

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x-1}{e^y}$$

y esta ecuación es de variables separables

Paso 1: Separar variables

$$e^y dy = (x-1)dx$$

Paso 2: Integrar ambos miembros de la ecuación

$$\int e^y dy = \int (x-1)dx$$

$$e^y = \frac{x^2}{2} - x + C$$

Luego, la familia de soluciones uniparamétricas de la ecuación es

$$e^y = \frac{x^2}{2} - x + C$$

En los dos últimos ejemplos, la familia de soluciones uniparamétricas es dada en **forma implícita**

Ejemplo 7

Resuelva el problema con valores iniciales

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

$$y(4) = -3$$

Solución

La ecuación diferencial es de variables separables.

Paso1: Separar variables

$$ydy = -xdx$$

Paso 2: Integrar ambos miembros de la ecuación

$$\int ydy = -\int xdx$$

$$\frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + C$$

$$x^2 + y^2 = C$$

donde se ha considerado 2C = C.

Ahora se aplica la condición inicial

$$y(4) = -3$$

en el paso 2 para obtener el valor de C

$$(4)^2 + (-3)^2 = C$$

$$C = 25$$

Entonces

$$x^2 + y^2 = 25$$

Es la solución del problema de valor inicial.

Ejemplo 8

Encuentre la solución particular de la ecuación diferencial

$$x\ \frac{dy}{dx} = y \ln y \ln x$$

Sujeta a la condición inicial x = e, y = e

Solución

La edo es una ecuación de variables separables porque se puede escribir como

$$\frac{dy}{dx} = (\frac{lnx}{x})(ylny)$$

Paso1: Separar variables

$$\frac{dy}{ylny} = \frac{lnx}{x}dx$$

Paso 2: Integrar ambos miembros de la ecuación

$$\int \frac{dy}{ylny} = \int \frac{lnx}{x}dx$$

$$u = \ln y \qquad\qquad v = \ln x$$

$$du = \frac{1}{y}\ dy \qquad\qquad dv = \frac{1}{x}\ dx$$

$$\int \frac{du}{u} = \int v\, dv$$

$$ln\,|u| = \frac{v^2}{2} + C$$

Luego, la familia de soluciones uniparamétricas de la ecuación diferencial es

$$ln\,|\,ln\,y\,| = \frac{(\ln x)^2}{2} + C$$

Ahora se aplica la condición inicial

$$y(e) = e$$

en el paso 2 para obtener el valor de C

$$ln\,|\,ln\,e\,| = \frac{(\ln e)^2}{2} + C$$

$$0 = \frac{1}{2} + C$$

$$C = -\frac{1}{2}$$

Entonces, la solución del PVI es

$$ln|lny| = \frac{(lnx)^2}{2} - \frac{1}{2}$$

que se puede escribir como

$$lny = e^{\frac{(lnx)^2-1}{2}}$$

Es la solución particular de la edo de primer orden.

2.2.3 Aplicaciones

Dinámica de población

Ejemplo 9

La población de una ciudad crece constantemente a medida que pasa el tiempo. Si la población se ha duplicado en tres años y en cinco años ha alcanzado la cifra de 40 000 habitantes. ¿Cuántas personas vivían en la ciudad al comienzo de ese período de 5 años?

Solución.

Se utilizan los 4 fases del Método de Polya.

1. Comprender el problema

¿Cuál es la incógnita?

El número de personas que vivían en la ciudad al inicio de los 5 años

¿Cuáles son las variables?

t = tiempo medido en años.

P = Población de la ciudad medida en número de personas.

P es la variable dependiente del tiempo t y la población de la ciudad en el tiempo t se denota por $P(t)$.

De esta manera, la población inicial se denota por $P(0) = P_0$

¿Cuáles son los datos?

La población se ha duplicado en tres años, es decir,

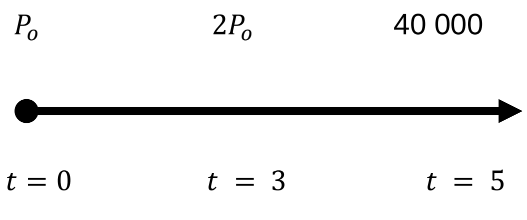
$P(3) = 2P_0$

La población en cinco años es de 40 000 habitantes, es decir; $P(5) = 40\,000$

¿Cuál es la restricción?

t es la variable tiempo medida en años, $P(t)$ la población de la ciudad en el tiempo t y P_0 la población inicial.

¿Podrías representar gráficamente esta situación?



2. Concebir un plan

Identificar la propiedad o ley se puede aplicar para formular el modelo matemático del problema

Formular el modelo matemático del problema

Clasificar la ecuación diferencial que interviene en el modelo matemático

Identificar la estrategia para resolver la ecuación diferencial

Determinar el valor de las constantes que aparecen en la solución

3. Ejecución del plan

Propiedad: se dice que dos cantidades a y b son proporcionales si existe una constante k tal que $a = kb$.

Ley de Thomas Malthus: la razón con la que varía la población de un país en un cierto tiempo es proporcional a la población total del país en ese tiempo.

El modelo matemático del problema es

$$\frac{dP}{dt} = kP$$

$$P(0) = P_0$$

$$P(3) = 2P_0$$

$$P(5) = 40\ 000$$

La ecuación diferencial que interviene en el modelo matemático del problema es de variables separables.

Para resolver la ecuación diferencial primero se separan las variables, es decir

$$\frac{dP}{P} = kdt$$

y luego se integra ambos miembros

$$\int \frac{dP}{P} = \int kdt$$

$$lnP(t) = kt + C$$

$$P(t) = Ce^{kt}$$

Luego, la familia de soluciones uniparamétricas de la edo de primer orden es $P(t) = Ce^{kt}$, donde C y k son constantes a determinar

¿Cómo determinar la constante C y k?

Se tiene que

$$P_0 = P(0) = C \Rightarrow P(t) = P_0 e^{kt}$$

Por otro lado

$$2P_0 = P(3) = P_0 e^{3k} \Rightarrow k = \frac{1}{3} ln2 = 0.2310 \Rightarrow P(t) = P_0 e^{0.2310\, t}$$

Además

$$40\,000 = P(5) = P_0 e^{1.1550} \Rightarrow P_0 = \frac{40\,000}{e^{1.1550}} = 12\,602.3015 \approx 12\,602.$$

Luego, la solución del modelo matemático es

$$P(t) = 12\,602 e^{0.2310\, t}$$

Como la incógnita del problema es la población inicial P_0 se tiene que esta es aproximadamente de 12 602 personas.

4. Visión retrospectiva

¿La respuesta satisface las condiciones del problema?

En efecto,

$$P(3) = 12602 * e^{0.6930} = 25\,200 \approx 2(12602) = 25\,204$$

$$P(5) = 12602 * e^{1.1550} = 39\,999 \approx 40\,000$$

Ejemplo 10

Un cultivo tiene una cantidad inicial P_0 de bacterias. Cuando t = 1 hora la cantidad de bacterias es $\frac{3}{2}P_0$. Si la rapidez de crecimiento es proporcional a la cantidad de bacterias presente P (t) en el momento t, dentro de cuánto tiempo la cantidad de microorganismos presente es igual al triple de la cantidad inicial?

Solución

1. Comprender el problema

¿Cuál es la incógnita?

El tiempo que debe transcurrir para que la cantidad de microorganismos sea igual al triple de la cantidad inicial.

¿Cuáles son las variables?

t = tiempo medido en horas.

P = Cantidad de bacterias en un cultivo.

P es la variable dependiente del tiempo t y la cantidad de bacterias en el cultivo en el tiempo t se denota por $P(t)$.

De esta manera, la cantidad inicial de bacterias se denota por $P(0) = P_0$

¿Cuáles son los datos?

La cantidad inicial de bacterias es P_0, es decir

$P(0) = P_0$

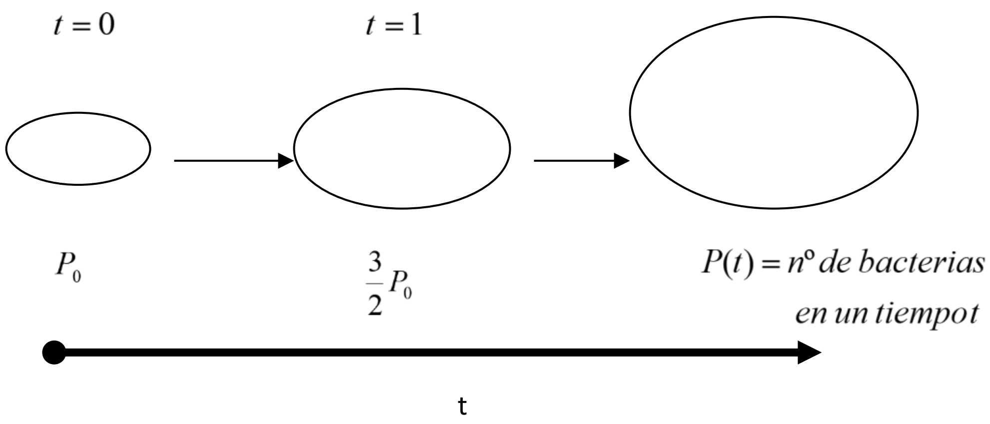
Cuando t = 1 hora, la cantidad de bacterias es $\frac{3}{2}P_0$, es decir

$P(1) = \frac{3}{2}P_0$

¿Cuál es la restricción?

t es el tiempo medido en horas, $P(t)$ la cantidad de bacterias en el tiempo t y P_0 la cantidad inicial de bacterias.

¿Podrías representar gráficamente esta situación?



2. Concebir el plan

Identificar la propiedad o ley se puede aplicar para formular el modelo matemático del problema

Formular el modelo matemático del problema

Clasificar la ecuación diferencial que interviene en el modelo matemático

Identificar la estrategia para resolver la ecuación diferencial

Determinar el valor de las constantes que aparecen en la solución

3. Ejecución del plan

Propiedad: se dice que dos cantidades a y b son proporcionales si existe una constante k tal que $a = kb$.

Ley de Thomas Malthus: la razón con la que varía la población de un país en un cierto tiempo es proporcional a la población total del país en ese tiempo.

El modelo matemático del problema es

$$\frac{dP}{dt} = kP$$

$$P(0) = P_0$$

$$P(1) = \frac{3}{2}P_0$$

La ecuación diferencial que interviene en el modelo matemático del problema es de variables separables.

Para resolver la ecuación diferencial primero se separan las variables, es decir

$$\frac{dP}{P} = kdt$$

y luego se integra ambos miembros

$$\int \frac{dP}{P} = \int kdt$$

$$lnP(t) = kt + C$$

$$P(t) = Ce^{kt}$$

¿Cómo determinar la constante C y k?

Se tiene que

$$P_0 = P(0) = C \;\; \Rightarrow \;\; P(t) = P_0 e^{kt}$$

Por otro lado

$$\frac{3}{2}P_0 = P(1) = P_0 e^{k} \;\; \Rightarrow \;\; k = \ln(\frac{3}{2}) = 0.4055 \;\; \Rightarrow \; P(t) = P_0 e^{0.4055\, t}$$

Ahora se puede determinar el tiempo que debe transcurrir para que la cantidad de microorganismo sea el triple de la cantidad inicial. Para tal efecto, se hace $P(t) = 3P_0$ en esta última expresión de $P(t)$

$$3P_0 = P_0e^{0.4055\,t} \;\;\Rightarrow\;\; 3 = e^{0.4055\,t} \;\;\Rightarrow\;\; t = \frac{ln3}{0.4055} \approx 2.71 \text{ hrs}$$

Luego, deben transcurrir 2.71 hrs. para que la cantidad de microorganismos sea igual al triple de la cantidad inicial.

4. Visión retrospectiva

Verifiquemos que cuando t = 0, la cantidad inicial de bacterias es P_0. Esto es, $P(0) = P_0$

$$P\ (t) = P_0e^{0.4055\,t}$$

$$P\ (0) = P_0e^{0.4055(0)} = P_0$$

Además

$$P(1) = P_0e^{0.4055} = 1.5P_0 = \frac{3}{2}P_0$$

Por lo tanto, la respuesta es correcta.

2.3 Actividades

1. Completa el siguiente cuadro. Escriba en la columna etiquetada con el nombre de variable independiente la letra que simboliza a dicha variable, haga lo mismo en la columna de la variable dependiente. En la columna etiquetada como variables separables escriba **si**, si la edo de primer orden es de variables separables, en caso contrario escriba **no**.

Ecuación diferencial ordinaria de primer orden	Variable independiente	Variable dependiente	Variables separables
$\frac{dy}{dx} = e^{2x+3y}$			
$(4y + yx^2)\frac{dy}{dx} - (2x + xy^2) = 0$			
$\frac{dx}{dt} + x^2 sen\ t = 0$			
$\left(z + t\ cot\left(\frac{z}{t}\right)\right)dt - tdz = 0$			

$$\frac{du}{dv} = \frac{uv + 3v - u - 3}{uv - 2v + 4u - 8}$$

2. Resuelva las ecuaciones diferenciales que en el ítem 1 las clasificó como de variables separables.

3. Resuelva los siguientes problemas usando las cuatro fases del método de George Polya

   a) Se sabe que la población de una comunidad crece con una razón proporcional al número de personas presentes en el tiempo t. Si la población inicial P_0 se duplicó en cinco años. ¿En cuánto tiempo se triplicará y cuadruplicará?
   b) La población de un pueblo crece con una razón proporcional a la población en el tiempo t. La población inicial de 500 aumenta 15% en 10 años. ¿Cuál será la población pasados 30 años?¿Qué tan rápido está creciendo la población en $t = 30$?
   c) La población de bacterias en un cultivo crece a una razón proporcional a la cantidad de bacterias presentes al tiempo t. Después de tres horas se observa que hay 400 bacterias presentes. Después de 10 horas hay 2000 bacterias presentes. ¿Cuál era la cantidad inicial de bacterias?

Tema 03: Ecuaciones diferenciales lineales. Aplicaciones

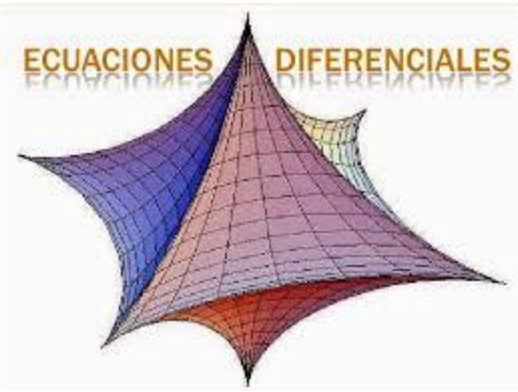


Imagen tomada de la word wide web

¿Qué entiendes por ecuación diferencial ordinaria lineal?

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

…………………………………………………………………

3.1 Introducción

En esta parte del módulo se explica el método de solución de las ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden que son lineales, así como su aplicación a problemas de mezclas.

3.2 Fundamentos teóricos

3.2.1 Ecuaciones diferenciales lineales

La ecuación diferencial de primer orden

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

es lineal si se puede escribir en la forma

$$a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = q(x) \qquad (1)$$

donde $a_1(x), a_0(x)\ y\ q(x)$ son funciones que dependen únicamente de x.

Se dice que la ecuación diferencial lineal es homogénea cuando $q(x) \equiv 0$. En caso contrario, es no homogénea.

Al dividir ambos lados de la ecuación diferencial lineal entre el coeficiente $a_1(x)$, se obtiene la ecuación

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x) \qquad (2)$$

Llamada forma estándar de la ecuación (1).

Ejemplo 1

La edo de primer orden

$\frac{dy}{dx} - y = x^2$

Es una edo de primer orden. También lo es la edo

$$x\frac{dy}{dx} + 2y = x^2e^x$$

Ejemplo 2

Las edo

$$x\frac{dy}{dx} + 2y^3 = x^2e^x$$

No es una edo lineal por el término no lineal y^3. De igual manera, la edo

$$xy\frac{dy}{dx} - y = x$$

No es una edo lineal porque el coeficiente de la derivada depende de x e y

3.2.2 Estrategia para resolver ecuaciones diferenciales lineales

Paso 1: Escriba la ecuación diferencial en la forma estándar

Paso 2: Identifique P(x) y después determine el factor de integración

$$e^{\int P(x)dx}$$

Paso 3: Multiplique la forma estándar por el factor de integración. La ecuación resultante es

$$\frac{d}{dx}\left[ye^{\int P(x)dx}\right] = Q(x)e^{\int P(x)dx}$$

Paso 4: Integre ambos lados de esta última ecuación.

Ejemplo 3

Resolver $\frac{dy}{dx} - 3y = 0$

Solución.

La variable independiente es x y la variable dependiente es y.

La ecuación está en la forma estándar y es lineal homogénea.

P(x) = -3 y el factor integrante es $e^{\int P(x)dx} = e^{-3x}$.

Se multiplica la ecuación por este factor

$$e^{-3x}\frac{dy}{dx} - 3e^{-3x}y = 0$$

Que se puede escribir como

$$\frac{d}{dx}(e^{-3x}y) = 0$$

Integrando ambos lados de la última ecuación se obtiene $e^{-3x}y$= c. Al despejar y se obtiene la familia de soluciones uniparamétricas $y = ce^{-3x}$, dada en forma explícita.

Ejemplo 4

Resolver $\frac{ds}{dt} - 3s = 9$

Solución.

La variable independiente es t y la variable dependiente es s.

La ecuación tiene la forma estándar y es lineal no homogénea.

$P(t) = -3$ y el factor integrante es $e^{\int P(t)dt} = e^{-3t}$.

Se multiplica la ecuación por este factor

$$e^{-3t}\frac{ds}{dt} - 3e^{-3t}s = 9e^{-3t}$$

que se puede escribir como

$$\frac{d}{dt}(e^{-3t}s) = 9e^{-3t}$$

Al integrar ambos lados de la ecuación se obtiene

$$e^{-3t}s = -3\,e^{-3t} + c$$

o sea

$$s = -3 + ce^{3t}$$

que representa la familia de soluciones uniparamétricas de la edo lineal.

Ejemplo 5

Determinar la solución de la ecuación $(x^2-4)\dfrac{dy}{dx}+xy=0$ en el intervalo (2, +∞).

Solución.

La variable independiente es x y la variable dependiente es y.

Para escribir la ecuación diferencial en la forma estándar, se divide toda la ecuación entre (x^2-4) .

$$\frac{dy}{dx}+\frac{x}{x^2-4}y=0$$

Como $P(x)=\dfrac{x}{x^2-4}$, el factor de integración es

$$e^{\int\frac{xdx}{x^2-4}}=e^{\frac{1}{2}\ln\left|x^2-4\right|}=\sqrt{x^2-4}$$

Después de multiplicar la edo en forma estándar por este factor, se obtiene

$$\frac{d}{dx}(\sqrt{x^2-4}\,y)=0$$

Al integrar ambos miembros de esta ecuación se obtiene $\sqrt{x^2-4}\,y=c$. Por consiguiente en el intervalo (2, +∞) la familia de soluciones uniparamétricas de la edo de primer orden es $y=\dfrac{c}{\sqrt{x^2-4}}$.

Ejemplo 6

Hallar la solución del PVI

$$\frac{dy}{dx}+y=x$$
$$y(0)=4$$

Solución.

En la edo, la variable independiente es x y la variable dependiente es y.

Como $P(x)=1$, el factor de integración es $e^{\int dx}=e^x$. Después de multiplicar la ecuación diferencial por este factor, se obtiene la edo

$$\frac{d}{dx}(ye^x) = xe^x$$

Al integrar ambos miembros, se tiene que $ye^x = xe^x - e^x + c$ y al despejar y de esta última ecuación se obtiene la familia de soluciones uniparamétricas

$$y = x - 1 + ce^{-x}.$$

Para obtener la solución del PVI, se sustituye $x = 0$, $y = 4$ en la familia de soluciones uniparamétricas y se obtiene $c = 5$. Por tanto, la solución del PVI es $y = x - 1 + 5e^{-x}$.

3.2.3 Aplicaciones

Mezclas de sustancias

Ejemplo 7

Suponga que un tanque mezclador grande contiene 300 galones de salmuera (sal disuelta en agua). Otra solución de salmuera se bombea al tanque a razón de 3 galones/minuto con 2 libras de sal por galón. La solución bien agitada se desaloja a la misma razón. Si había 50 libras de sal disuelta en los 300 galones iniciales. ¿Cuánta sal habrá en el tanque pasado mucho tiempo?

Solución

1. Comprender el problema

¿Cuál es la incógnita?
Cantidad de sal en el tanque después de mucho tiempo.

¿Cuáles son las variables?
t = Tiempo medido en minutos.

S = La cantidad de sal en el tiempo t.

S es la variable dependiente del tiempo t y la cantidad de sal en el tanque en el tiempo t se denota por $S(t)$.

De esta manera, la cantidad inicial de sal se denota por $S(0) = S_0$

¿Cuáles son los datos?

La cantidad inicial de sal en el tanque es $S_0 = 50$, es decir

$S(0) = 50$

El tanque contiene inicialmente 300 galones de salmuera con 50 lb de sal disuelta.

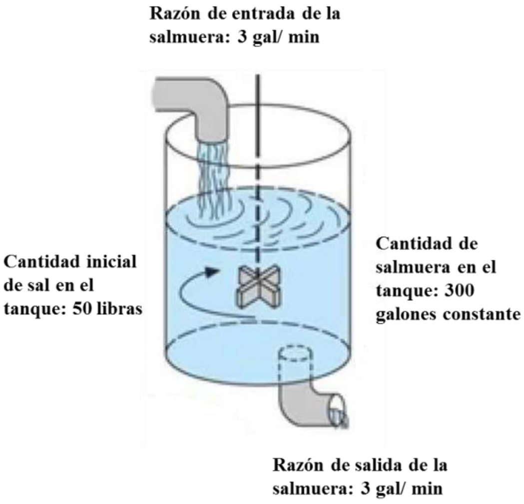
Ingresa al tanque
Salmuera a razón de 3 gal/min con 2 lb/gal de sal .

Sale del tanque
La solución bien agitada se desaloja del tanque a la misma razón, es decir, 3 gal/min.

¿Cuál es la restricción?

t es el tiempo en minutos, S la cantidad de sal en el tanque medida en libras y S_0 la cantidad inicial de sal en el tanque.

¿Podrías representar gráficamente esta situación?



2. Concebir un plan

Identificar la propiedad o ley se puede aplicar para formular el modelo matemático del problema

Formular el modelo matemático del problema

Clasificar la ecuación diferencial que interviene en el modelo matemático

Identificar la estrategia para resolver la ecuación diferencial

Determinar el valor de las constantes que aparecen en la solución

3. Ejecución del plan

Si $S(t)$ la cantidad de sal en el tanque en el tiempo t, entonces la razón con la que cambia $S(t)$, es la razón neta:

$$\frac{dS}{dt} = (razón\ de\ entrada\ de\ la\ sal) - (razón\ de\ salida\ de\ la\ sal) = R_i - R_0$$

Ahora bien, la razón con que entra la sal al tanque, en lb/min, es

$R_{entrada}$ = (Razón de entrada de la salmuera)(Concentración de sal)

= (3 gal/min)(2 lb/gal) = 6 lb/min

R_{salida} = (Razón de salida de la salmuera)(Razón de salida de la sal)

= (3 gal/min)($\frac{S}{300}$ lb/gal) = $\frac{S}{100}$ lb/min

Entonces la razón con la que cambia la sal en el tiempo t es dada por la ecuación diferencial

$$\frac{dS}{dt} = 6 - \frac{S}{100}$$

La condición inicial es $S(0) = 50$. Luego el modelo matemático del problema es:

$$\frac{dS}{dt} = 6 - \frac{S}{100}$$
$$S(0) = 50$$

La ecuación diferencial que interviene en el modelo matemático se puede reescribir en la forma

$$\frac{dS}{dt} + \frac{S}{100} = 6$$

que corresponde a una ecuación diferencial lineal de primer orden en su forma estándar.

Para resolver la ecuación diferencial primero se obtiene el factor de integración

$$e^{\int \frac{1}{100}dt} = e^{\frac{t}{100}}$$

Luego, se multiplica la ecuación diferencial por el factor de integración

$$\frac{d}{dt}\left(Se^{\frac{t}{100}}\right) = 6e^{\frac{t}{100}}$$

Ahora se integra ambos miembros

$$\int d\left(Se^{\frac{t}{100}}\right) = 6\int e^{\frac{t}{100}}\, dt$$

$$Se^{\frac{t}{100}} = 600e^{\frac{t}{100}} + C$$

$$S(t) = 600 + Ce^{-\frac{t}{100}}$$

$S(t) = 600 + Ce^{-\frac{t}{100}}$ representa la familia de soluciones uniparamétricas de la edo.

Para hallar la constante arbitraria, usamos la condición inicial

$$S(0) = 50$$

$$50 = S(0) = 600 + C \;\; \Rightarrow \;\; C = -550$$

De esta manera, la solución del modelo matemático es

$$S(t) = 600 - 550e^{-\frac{t}{100}}$$

Para saber cuánta sal habrá en el tanque pasado mucho tiempo, hay que calcular $\lim\limits_{t\to\infty} S(t)$. En efecto

$$\lim_{t\to\infty} S(t) = 600 - 550\lim_{t\to\infty} e^{-\frac{t}{100}} = 600\ lb.$$

4. Visión retrospectiva

Nótese que había 50 libras de sal disuelta en los 300 galones iniciales. Para verificar esto, se sustituye estos valores en la solución del modelo matemático

$$S(0) = 600 - 550e^0 = 600 - 550 = 50$$

Luego, se concluye que los cálculos son correctos.

3.3 Actividades

1. Completa el siguiente cuadro. Escriba en la columna etiquetada con el nombre de variable independiente la letra que simboliza a dicha variable, haga lo mismo en la columna de la variable dependiente. En la columna etiquetada como ecuación lineal escriba **si**, si la edo de primer orden es lineal, en caso contrario escriba **no**.

Ecuación diferencial ordinaria de primer orden	Variable independiente	Variable dependiente	Ecuación lineal
$x\frac{dy}{dx} = 2xe^x - y + 6x^2$			
$x\frac{dy}{dx} - y = x^2\, sen\, x$			
$(x+2)^2\frac{dy}{dx} = 5 - 8y - 4xy$			
$(y-x)dy - ydx = 0$			
$\frac{du}{dv} + 2vu^2 = 0$			

2. Resuelva las ecuaciones diferenciales que en el ítem 1 las clasificó como lineales.

3. Resuelva los siguientes problemas usando las cuatro fases del método de George Polya

a) Un tanque contiene 200 litros de un líquido en el que han disuelto 30 g. de sal. Salmuera que tiene un gramo de sal por litro entra al tanque con una razón de cuatro litros por minuto; la solución bien mezclada sale del tanque con la misma razón. Encuentre la cantidad $S(t)$ de gramos de sal que hay en el tanque al tiempo t.

b) Un gran tanque de 500 galones está lleno de agua pura. Le entra salmuera que tiene 2 lb de sal por galón a razón de 5 gal/min. La solución bien mezclada sale del tanque con la misma razón. Determina la cantidad $S(t)$ de libras de sal que hay en el tanque al tiempo t.

c) Un gran tanque está parcialmente lleno con 100 galones de fluido en los que se disolvieron 10 libras de sal. La salmuera tiene ½ lb de sal por galón que entra al tanque a razón de 6 gal/min. La solución bien mezclada sale del tanque a razón de 4 gal/min. Determine la cantidad de libras de sal que hay en el tanque después de 30 minutos.

Tema 04: Ecuaciones diferenciales exactas. Aplicaciones

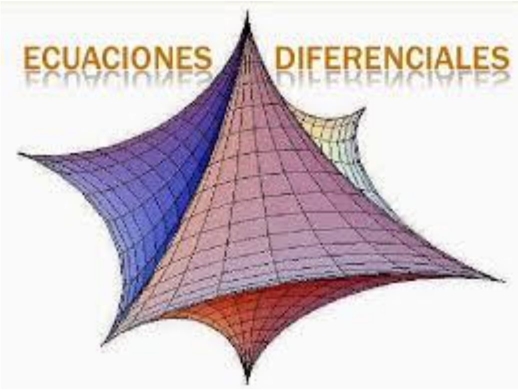
¿Qué entiendes por una ecuación diferencial ordinaria exacta?

……………………………………………………………

……………………………………………………………

……………………………………………………………

ord wide web



4.1 Introducción

Continuando con los métodos de solución de algunas ecuaciones diferenciales de primer orden, ahora se explica el método de solución de las ecuaciones diferenciales exactas así como su aplicación a problemas de calentamiento o enfriamiento de un cuerpo (ley de Newton) y curvas ortogonales.

4.2 Fundamentos teóricos

4.2.1Ecuaciones diferenciales exactas

La ecuación diferencial de primer orden

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

es exacta si satisface el criterio de exactitud:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

Observe que $M(x,y)$ es el coeficiente de dx y $N(x,y)$ el coeficiente de dy.

Ejemplo 1

¿Es 2xy dx + (x^2 -1) dy = 0 una EDO exacta?

Solución.

Se considera a x como variable independiente y a y como variable dependiente. En esta ecuación $M(x,y) = 2xy,\ N(x,y) = x^2 - 1$y se tiene que

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2x = \frac{\partial N}{\partial x}$$

Entonces, la edo de primer orden es exacta.

Ejemplo 2

Verificar si la edo de primer orden

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x^3 + xy^2}{x^2 y + y^3}$$

es exacta.

Solución.

Multiplicando en cruz y transponiendo términos, la ecuación dada adopta la forma

$$(x^3 + xy^2)dx + (x^2 y + y^3)dy = 0$$

donde, $M(x,y) = x^3 + xy^2$ y $N(x,y) = x^2 y + y^3$. En este caso

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2xy = \frac{\partial N}{\partial x}$$

y por lo tanto, la edo es exacta.

Ejemplo 3

¿Es exacta la EDO $(x + y^2)dx - 2xydy = 0$

Solución.

En este caso $M(x,y) = x + y^2$, $N(x,y) = -2xy$. Como

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2y \quad \neq \quad \frac{\partial N}{\partial x} = -2y$$

Se concluye que la edo no es exacta.

4.2.2 Estrategia para resolver ecuaciones diferenciales exactas

Paso 1

Si la ecuación diferencial es exacta, entonces existe una función $\varphi(x,y)$ tal que

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = M(x,y)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = N(x,y)$$

Paso 2
Halle $\varphi(x,y)$ resolviendo el sistema de ecuaciones anteriores

Paso 3
La familia de soluciones uniparamétricas de la ecuación diferencial exacta es $\varphi(x,y) = C$

Ejemplo 4

Halle la familia de soluciones uniparamétricas de la edo de primer orden

$2xy\,dx \,+\, (x^2 \,-1)\,dy \;=\; 0$

Solución.

La ecuación es exacta con $M(x,y) = 2xy$ y $N(x,y) = x^2 - 1$

De acuerdo al procedimiento indicado, existe una función $\varphi(x,y)$ tal que

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 2xy \qquad \ldots.. \quad (1)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = x^2 - 1 \quad \ldots.. \quad (2)$$

Integrando (1) con respecto a x

$$\varphi(x,y) = \int 2xy dx = x^2 y + k(y)$$

Ahora, derivando φ con respecto a y

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = x^2 + k'(y)$$

y reemplazando en (2)

$$x^2 + k'(y) = x^2 - 1$$

de aquí se obtiene $k'(y) = -1$, o sea, $k(y) = -y$. Luego

$$\varphi(x,y) = x^2 y - y$$

y la familia de soluciones uniparamétricas de la edo es $x^2 y - y = C$.

Ejemplo 5

Hallar la familia de soluciones uniparamétricas de la ecuación diferencial $(x^3 + xy^2)dx + (x^2y + y^3)dy = 0$.

Solución.

La ecuación es exacta con $M(x,y) = x^3 + xy^2$ y $N(x,y) = x^2y + y^3$. Luego existe una función $\varphi(x,y)$ tal que

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = x^3 + xy^2 \qquad \text{(a)}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} = x^2y + y^3 \qquad \text{(b)}$$

Integrando (b) con respecto a y

$$\varphi(x,y) = \frac{x^2y^2}{2} + \frac{y^4}{4} + k(x)$$

y derivando $\varphi(x,y)$con respecto a x

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = xy^2 + k'(x)$$

e igualando a (a)

$$xy^2 + k'(x) = x^3 + xy^2$$

De aquí obtenemos $k'(x) = x^3$, es decir, $k(x) = \frac{x^4}{4}$. Luego

$\varphi(x,y) = \frac{x^2y^2}{2} + \frac{y^4}{4} + \frac{x^4}{4}$ y la familia de soluciones uniparamétricas de la edo es $\frac{x^4}{4} + \frac{x^2y^2}{2} + \frac{y^4}{4} = c$

4.2.3 Aplicaciones

Ley de Newton del enfriamiento o calentamiento

Ejemplo 6

Una pequeña barra metálica, cuya temperatura inicial fue de 20°C se sumerge en un gran recipiente de agua hirviente ¿Cuánto tarda la barra en alcanzar 90°C si se sabe que su temperatura aumenta 2° en un segundo?¿Cuánto tiempo le toma a la barra llegar a 98°C?

Solución

1. Comprender el problema

¿Cuál es la incógnita?
Tiempo que tarda la barra metálica en alcanzar los 90°C.

Tiempo que le toma a la barra metálica llegar a los 98°C

¿Cuáles son las variables?
t = Tiempo medido en segundos.

T = La temperatura de la barra metálica medida en °C.

T es la variable dependiente del tiempo t y la temperatura de la barra metálica en el tiempo t se denota por $T(t)$.

De esta manera, la temperatura inicial de la barra metálica se denota por $T(0) = T_0$

¿Cuáles son los datos?

La temperatura inicial de la barra metálica es 20°C, es decir

$$T(0) = 20°C$$

La temperatura de la barra, sumergida en agua hirviente, aumenta 2°C por segundo, es decir

$$T(1) = 22°C$$

La temperatura del agua herviente es 100°C

Temperatura del medio ambiente donde se coloca la barra metálica es 100°C, es decir

$$T_m = 100°C$$

¿Cuál es la restricción?

t es el tiempo en segundos, T la temperatura de la barra metálica medida en °C, T_m la temperatura del medio ambiente y T_0 la temperatura inicial de la barra metálica.

¿Podrías representar gráficamente esta situación?

2. Concebir un plan

Identificar la propiedad o ley se puede aplicar para formular el modelo matemático del problema

Formular el modelo matemático del problema

Clasificar la ecuación diferencial que interviene en el modelo matemático

Identificar la estrategia para resolver la ecuación diferencial

Determinar el valor de las constantes que aparecen en la solución

3. Ejecución del plan

Propiedad: se dice que dos cantidades a y b son proporcionales si existe una constante k tal que $a = kb$.

Ley de Newton: La rapidez con que cambia la temperatura de un cuerpo es proporcional a la diferencia entre la temperatura del cuerpo y la del medio que lo rodea, que se llama temperatura ambiente.

El modelo matemático del problema es

$$\frac{dT}{dt} = k(T - 100)$$

$$T(0) = 20$$

$$T(1) = 22°C$$

La ecuación diferencial que interviene en el modelo matemático del problema es de variables separables.

Para resolver la ecuación diferencial primero se separan las variables, es decir

$$\frac{dT}{(T-100)} = kdt$$

y luego se integra ambos miembros

$$\int \frac{dT}{(T-100)} = \int kdt$$

$$ln|T-100| = kt + C$$

$$T - 100 = Ce^{kt}$$

$$T(t) = Ce^{kt} + 100$$

¿Cómo determinar la constante C y k?

Se tiene que

$20 = T(0) = C + 100 \;\; \Rightarrow \; C = -80 \;\; \Rightarrow \; T(t) = -80e^{kt} + 100$

Por otro lado

$$22 = T(1) = -80e^{k} + 100 \;\; \Rightarrow \;\; k = \ln\left(\frac{78}{80}\right) = -0.025318$$

Entonces, la solución del modelo matemático es

$$T(t) = -80e^{-0.025318\,t} + 100$$

Ahora podemos determinar los tiempos requeridos para que la barra metálica alcance las temperaturas indicadas.

Tiempo que debe transcurrir para que la barra metálica alcance los 90°C:

$$90 = T(t) = -80e^{-0.025318\,t} + 100$$

$$-10 == -80e^{-0.025318\,t}$$

$$\frac{1}{8} = e^{-0.025318\,t}$$

$$t = -\frac{1}{0.025318}\ln\left(\frac{1}{8}\right) \approx 82.1330\;hrs.$$

Por tanto deben transcurrir, aproximadamente, 82.1330 horas para que la barra alcance la temperatura de 90°C

Tiempo que debe transcurrir para que la barra metálica alcance los 98°C:

$$98 = T(t) = -80e^{-0.025318\,t} + 100$$

$$-2 == -80e^{-0.025318\,t}$$

$$\frac{1}{40} = e^{-0.025318\,t}$$

$$t = -\frac{1}{0.025318}\ln\left(\frac{1}{40}\right) \approx 145.7019\,hrs.$$

Por tanto deben transcurrir, aproximadamente, 145.7019 horas para que la barra alcance la temperatura de 98°C

4. Visión retrospectiva

Verificar que la temperatura inicial de la barra metálica es de 20°C. Sustituimos $t = 0$ en la solución y se tiene:

$$\begin{aligned} T(0) &= -80\,e^{-0.025318(0)} + 100 \\ &= -80 + 100 \\ &= 20 \end{aligned}$$

Por lo tanto, la solución es correcta.

¿La ecuación diferencial del modelo matemático del problema se puede resolver usando el método de ecuaciones exactas?

4.3 Actividades

1. Completa el siguiente cuadro. Escriba en la columna etiquetada con el nombre de variable independiente la letra que simboliza a dicha variable, haga lo mismo en la columna de la variable dependiente. En la columna etiquetada como ecuación exacta escriba **si**, si la edo de primer orden es exacta, en caso contrario escriba **no**.

Ecuación diferencial ordinaria de primer orden	Variable independiente	Variable dependiente	Ecuación exacta
$\left(1 - \frac{3}{y} + x\right)\frac{dy}{dx} + y = \frac{3}{x} - 1$			
$-ydt + (t + \sqrt{ty})dy = 0$			

$$(2uv^2 + ve^u)du + (2u^2v + e^u)dv = 0$$

$$(senxy + xy\cos xy)dx + (x^2\, cosxy)dy = 0$$

$$(cos^2x\ sen\ x)\frac{dy}{dx} + ycos^3x = 1$$

2. Resuelva las ecuaciones diferenciales que en el ítem 1 las clasificó como exactas.

3. Resuelva los siguientes problemas usando las cuatro fases del método de George Polya

   a) Un termómetro se cambia de una habitación donde la temperatura es de 70°F al exterior, donde la temperatura del aire es de 10°F. Después de medio minuto el termómetro indica 50°F. ¿Cuál es la lectura del termómetro en t = 1 minutos? ¿Cuánto tiempo le tomará al termómetro alcanzar los 15°F?
   b) Un termómetro se lleva de una habitación hasta el ambiente exterior, donde la temperatura del aire es de 5°F. después de un minuto, el termómetro indica 55°F y después de cinco minutos indica 30°F. ¿Cuál era la temperatura inicial de la habitación?
   c) Una pequeña barra de metal, cuya temperatura inicial era de 20°C, se deja caer en un gran tanque de agua hirviendo. ¿Cuánto tiempo tardará la barra en alcanzar los 90°C si se sabe que su temperatura aumentó 2° en un segundo? ¿Cuánto tiempo tardará en alcanzar los 98°C?

Tema 05: Ecuaciones diferenciales homogéneas. Aplicaciones

¿Qué entiendes por una ecuación diferencial ordinaria homogénea?

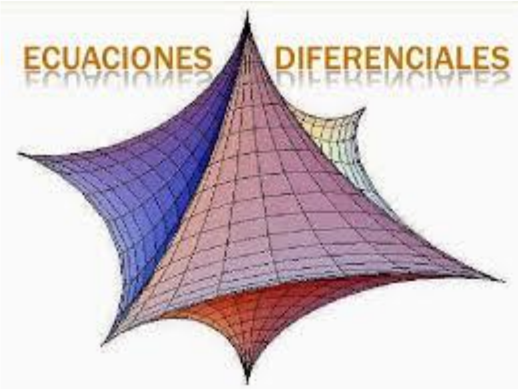
……………………………………………………………

……………………………………………………………

……………………………………………………………

……………………………………………………………

……………………………………………………………



5.1 Introducción

Estimado estudiante se concluye este módulo de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden dando a conocer el método de solución de las ecuaciones diferenciales homogéneas y su aplicación a problemas geométricos

5.2 Fundamentos teóricos

5.2.1 Ecuaciones diferenciales homogéneas

La ecuación diferencial de primer orden

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y)$$

es homogénea si satisface la condición

$$f(tx,ty) = f(x,y)$$

para todo t diferente de cero.

Ejemplo 1

Considere la ecuación diferencial ordinaria de primer orden

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{x-y}$$

¿Es homogénea?

Solución. Se tiene que $f(x,y) = \frac{x+y}{x-y}$

$$f(tx,ty) = \frac{tx+ty}{tx-ty} = \frac{t(x+y)}{t(x-y)} = \frac{x+y}{x-y} = f(x,y)$$

Luego, la ecuación diferencial es homogénea.

Ejemplo 2

¿La ecuación diferencial $\frac{dy}{dx}=\frac{ye^{y/x}+y}{x}$, es homogénea?

Solución. Se tiene que

$$f(x,y)=\frac{ye^{y/x}+y}{x}$$

$$f(tx,ty)=\frac{tye^{ty/tx}+ty}{tx}=\frac{t(ye^{y/x}+y)}{tx}=\frac{ye^{y/x}+y}{x}=f(x,y)$$

Luego, la ecuación diferencial es homogénea.

5.2.2 Estrategia para resolver ecuaciones diferenciales homogéneas

Se hace el cambio de variable $\begin{cases} y=ux \\ \frac{dy}{dx}=u+x\frac{du}{dx} \end{cases}$ (**)

y reemplazar esto en la ecuación diferencial, se transforma en una ecuación diferencial de variables separables.

Ejemplo 3

1. Resolver la ecuación diferencial homogénea

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x+y}{x-y}$$

Solución. Reemplazando (**) en la edo y tomando los extremos, se tiene

$$u+x\frac{du}{dx}=\frac{x+ux}{x-ux}=\frac{1+u}{1-u} \quad \to \quad u+x\frac{du}{dx}=\frac{1+u}{1-u}$$

$$\to$$

Por transposición de términos y dando luego común denominador, la ecuación adopta la forma

$$x\frac{du}{dx}=\frac{1+u^2}{1-u}$$

que es de variables separables. Separando variables e integrando

$$\int(\frac{1-u}{1+u^2})du=\int\frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{du}{1+u^2} - \int \frac{u}{1+u^2}\, du = \ln|x| + C$$

$$arctg\, u - \frac{1}{2}\ln\left|1+u^2\right| - \ln|x| = C$$

Ahora, recuperamos las variables originales sustituyendo $u = \dfrac{y}{x}$

$$arctg\,(\frac{y}{x}) - (\ln\left|1+(\frac{y}{x})^2\right|^{1/2} |x|) = C$$

5.2.3 Aplicaciones

Curvas ortogonales

Ejemplo 4

Encuentre una familia de curvas que sea ortogonal a la familia de curvas $x^2 - y^2 = Kx$

Solución

1. **Comprender el problema**

¿Cuál es la incógnita?

Una familia de curvas ortogonales a la familia de curvas dada

¿Cuáles son las variables?

$x =$ Variable independiente

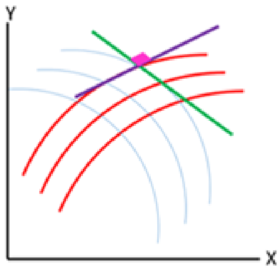
$y =$ Variable dependiente

¿Cuáles son los datos?

Una familia de curvas dada por $x^2 - y^2 = Kx$

¿Cuál es la restricción?

¿Podrías representar gráficamente esta situación?



2. **Concebir un plan**

Identificar la propiedad o ley que se puede aplicar para formular el modelo matemático.

Obtener la ecuación diferencial ordinaria de primer orden cuya familia de soluciones uniparamétricas es la familia dada.

Determinar la ecuación diferencial ordinaria de primer orden de la familia de curvas ortogonales a la familia dada.

Formular el modelo matemático.

Clasificar la ecuación diferencial que interviene en el modelo.

Identificar la estrategia para resolver la ecuación diferencial.

3. Ejecución del plan

Propiedad: Dos rectas, L_1, L_2 en el plano son ortogonales si y sólo si sus pendientes m_1, m_2 satisfacen la condición

$$m_1 * \ m_2 = -1 \ \Leftrightarrow m_1 = -\frac{1}{m_2}$$

Recta tangente a una curva: la recta tangente a la gráfica de la función $y = f(x)$ en cualquier punto (x,y) tiene pendiente igual a $\frac{dy}{dx}|_{(x,y)}$

Para obtener la ecuación diferencial de la familia de curvas $x^2 - y^2 = Kx$, se despeja la constante K y luego se deriva.

$$K = \frac{x^2 - y^2}{x}$$

$$0 = \frac{x\left(2x - 2y\dfrac{dy}{dx}\right) - (x^2 - y^2)}{x^2}$$

De donde se obtiene

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + y^2}{2xy}$$

Que es la ecuación diferencial de la familia dada.

La ecuación diferencial de la familia de curvas ortogonales a $x^2 - y^2 = Kx$, de acuerdo a la propiedad de las rectas ortogonales, es

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\frac{x^2+y^2}{2xy}}$$

O sea

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2xy}{x^2+y^2}$$

El modelo matemático del problema es la ecuación diferencial ordinaria de primer orden

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2xy}{x^2+y^2}$$

Se comprueba que esta ecuación diferencial es homogénea.

Al aplicar el cambio de variables

$$\begin{cases} y = ux \\ \frac{dy}{dx} = u + x\frac{du}{dx} \end{cases}$$

Se obtiene la familia de soluciones uniparamétricas $3x^2y + y^3 = C$, que es la familia de curvas ortogonales a $x^2 - y^2 = Kx$ buscada.

4. Visión retrospectiva

La pendiente de la familia de curvas $3x^2y + y^3 = C$ es $\frac{dy}{dx} = -\frac{2xy}{x^2+y^2}$. La pendiente de la otra familia de curvas $x^2 - y^2 = Kx$ es $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2+y^2}{2xy}$. Como se puede observar, el producto de estas dos pendientes es igual a -1, es decir , estas familia de curvas son ortogonales.

5.3 Actividades

1. Completa el siguiente cuadro. Escriba en la columna etiquetada con el nombre de variable independiente la letra que simboliza a dicha variable, haga lo mismo en la columna de la variable dependiente. En la columna etiquetada como ecuación homogénea escriba **si**, si la edo de primer orden es homogénea, en caso contrario escriba

2. **no**.

Ecuación diferencial de primer orden	Variable independiente	Variable dependiente	Ecuación homogénea
$\left(y + xcot\left(\frac{y}{x}\right)\right)dx - xdy = 0$			
$-ydx + (x + \sqrt{xy})dy = 0$			
$\frac{dy}{ds} = \frac{2s + y}{4s - 2y}$			
$dv + 3xv^2dx = 0$			
$xy' = y + 2xe^{-\frac{y}{x}}$			

2. Resuelva las ecuaciones diferenciales que en el ítem 1 las clasificó como homogéneas.

3. Resuelva los siguientes problemas usando las cuatro fases del método de George Polya
   Determine las trayectorias ortogonales para cada una de las siguientes familias de curvas.
   a) $y = cx^n$
   b) $x^2 + \frac{1}{2}y^2 = c^2$
   c) $x^2 - \frac{1}{3}y^2 = c^2$

BIBLIOGRAFÍA

Ibarra, J. (2013) *Matemáticas 5. Ecuaciones diferenciales*. Mc Graw Hill Education. México D. F.

Zill, D. (2009) *Ecuaciones diferenciales con aplicaciones de modelado*. 9ª ed. CENGAGE Learning. México D.F.

Zill, D. & Cullen, M. (2006) *Ecuaciones diferenciales con problemas de valores en la frontera*. 6ª ed. Thomson. México D. F.