UNIVERSIDAD CÉSAR VALLEJO

ESCUELA DE POSTGRADO

TESIS

MODELO DIDÁCTICO PIPAB PARA DESARROLLAR LA CAPACIDAD DEMOSTRACIÓN MATEMÁTICA DE LOS ESTUDIANTES UNIVERSITARIOS EN EL CÁLCULO DIFERENCIAL EN UNA UNIVERSIDAD DE LAMBAYEQUE, 2016.

PARA OBTENER EL GRADO DE DOCTOR

EN EDUCACIÓN

AUTOR

MG. RONY RAFAEL GARCÍA APÉSTEGUI

ASESOR

DR. JUAN PABLO MORENO MURO

LÍNEA DE INVESTIGACIÓN

INNOVACIONES PEDAGÓGICAS

CHICLAYO – PERÚ

2016

PÁGINA DE JURADO

Dra. Roger Rodríguez Ravelo.

Presidente

Dra. Ruth Esther Carrasco Ruíz.

Secretario

Dr. Juan Pablo Moreno Muro.

Vocal

DEDICATORIA

En primer lugar a DIOS, ser omnipotente que guía e ilumina mi futuro, y bendice mi presente.

A mi maravillosa madre HERMILA PILAR APÉSTEGUI AGUILAR y mi querido y recordado padre VIRGILIO GARCIA LACHOS, personas admirables que decidieron mi existencia y forjaron mi futuro.

AGRADECIMIENTO

A Dios, por darme la vida, y permitir que día a día sea mejor persona y continúe creciendo de manera profesional.

A la Universidad César Vallejo, por su compromiso con la Educación de los maestros del Perú, al ofrecer el programa de Doctorado en Educación; lo cual brinda oportunidades a muchos docentes a ampliar sus conocimientos científicos y teóricos; tal es mi caso, que he optimizado mi potencial cognitivo para ser compartido con mis estudiantes.

Al Dr. Juan Pablo Moreno Muro, por sus conocimientos necesarios en el proceso de asesoramiento de mi investigación.

DECLARATORIA DE AUTENTICIDAD

Yo, García Apéstegui, Rony Rafael, estudiante del Programa Doctorado en Educación en la Universidad César Vallejo, identificado con DNI N° 42330714, con la tesis titulada **“MODELO DIDÁCTICO PIPAB PARA DESARROLLAR LA CAPACIDAD DEMOSTRACIÓN MATEMÁTICA DE LOS ESTUDIANTES UNIVERSITARIOS EN EL CÁLCULO DIFERENCIAL EN UNA UNIVERSIDAD DE LAMBAYEQUE, 2016”**

Declaro bajo juramento que:

1) La tesis es de mi autoría.
2) He respetado las normas internacionales de citas y referencias para las fuentes consultadas.
3) La tesis no ha sido auto plagiado; es decir, no ha sido publicada ni presentada anteriormente para obtener algún grado académico previo o título profesional.
4) Los datos presentados en los resultados son reales, no han sido falseados, ni duplicados, ni copiados y por tanto los resultados que se presentan en la tesis se constituirán en aportes a la realidad investigada.

Chiclayo, Mayo del 2017.

____

Mg. García Apéstegui, Rony Rafael
DNI N° 42330714

PRESENTACIÓN

Señores miembros del jurado, presento ante ustedes la Tesis titulada **“MODELO DIDÁCTICO PIPAB PARA DESARROLLAR LA CAPACIDAD DEMOSTRACIÓN MATEMÁTICA DE LOS ESTUDIANTES UNIVERSITARIOS EN EL CÁLCULO DIFERENCIAL EN UNA UNIVERSIDAD DE LAMBAYEQUE, 2016**“ con la finalidad de proponer un modelo didáctico PIPAB para desarrollar la capacidad demostración matemática de los estudiantes universitarios en el cálculo diferencial, en cumplimiento del Reglamento de Grados y Títulos de la Universidad César Vallejo para obtener el Grado Académico de Doctor en Educación.

Esperando cumplir con los requisitos de aprobación.

Mg. García Apéstegui, Rony Rafael

ÍNDICE

ÍNDICE DE TABLAS

ÍNDICE DE FIGURAS

RESUMEN

El presente estudio de investigación lleva por título "MODELO DIDÁCTICO PIPAB PARA DESARROLLAR LA CAPACIDAD DEMOSTRACIÓN MATEMÁTICA DE LOS ESTUDIANTES UNIVERSITARIOS EN EL CÁLCULO DIFERENCIAL EN UNA UNIVERSIDAD DE LAMBAYEQUE, 2016", la misma que tuvo como objetivo principal lograr proponer un modelo didáctico PIPAB para desarrollar la capacidad demostración matemática de los estudiantes universitarios en el cálculo diferencial.

La investigación tuvo como muestra 04 docentes que dictan el curso de Cálculo Diferencial y 20 estudiantes, divididos en 17 varones y 3 mujeres; el tipo de diseño de investigación es transversal descriptivo, la técnica de recolección de datos fueron la entrevista, utilizando su instrumento que es el cuestionario, que fue aplicado a los docentes que enseñaron el curso de cálculo diferencial en la carrera de matemática de la U.N.P.R.G. y técnica de evaluación, a través de su instrumento el Test, el cual fue aplicado a los estudiantes de II ciclo de la carrera de matemática de la U.N.P.R.G. con la finalidad de analizar el desarrollo de la capacidad demostración matemática de los estudiantes, referente a la tabulación y resultados obtenidos, en la aplicación de la entrevista a los docentes a cargo de las asignaturas de Matemática y los resultados del test aplicado a los estudiantes del segundo ciclo se puede afirmar que por un lado el 75% de los docentes opinan que se tiene que trabajar desde los primeros ciclos el desarrollo de la capacidad de la demostración matemática en los estudiantes de esta especialidad, ya que esta habilidad les permitirá formarse correctamente como futuros profesionales de la ciencia matemática.

Palabras clave:

Modelo, PIPAB, capacidad y demostración.

ABSTRACT

The present research study titled "Pipab didactic model to develop the mathematical demonstration capacity of university students in the differential calculus", the same that had as main objective to propose a didactic model PIPAB to develop the mathematical demonstration capacity of university students In differential calculus.

The research had as sample 04 teachers who dictate the course of Differential Calculus and 20 students, divided into 17 men and 3 women; the type of research design is transversal descriptive, the data collection technique was the interview, using its instrument that is the questionnaire, which was applied to the teachers who taught the course of differential calculus in the mathematics career of the U.N.P.R.G. and evaluation technique, through its Test instrument, which was applied to the students of the 2nd cycle of the mathematics career of the U.N.P.R.G. with the purpose of analyzing the development of the mathematical demonstration ability of the students, referring to the tabulation and results obtained, in the application of the interview to the teachers in charge of the Mathematics subjects and the results of the test applied to the students of the Second cycle, it can be stated that on the one hand, 75% of teachers believe that the development of the capacity of mathematical demonstration in the students of this specialty has to be worked from the first cycles, since this ability will allow them to be properly trained as future professionals of mathematical science.

Key words:

Model, PIPAB, capacity and demonstration.

INTRODUCCIÓN

En la actualidad el aprendizaje de la Matemática viene siendo un problema álgido por resolver en países como el nuestro. El complejo tema del desarrollo de la competencia matemática viene siendo abordado por Instituciones públicas y privadas en todo el orbe. La competencia matemática se considera condicionante para el desarrollo personal, ciudadano, inclusión social y la empleabilidad en un mundo de la información y del conocimiento. Por tal motivo se ha emprendido la presente investigación a la problemática de ¿Qué modelo didáctico permite desarrollar la capacidad demostración matemática de los estudiantes universitarios en el Cálculo Diferencial en una Universidad de Lambayeque, 2016?, teniendo como objetivo proponer un modelo didáctico PIPAB, para desarrollar la capacidad demostración matemática de los estudiantes universitarios en el Cálculo Diferencial, siendo una investigación bajo un enfoque cuantitativo, no experimental que presenta un diseño de investigación transversal descriptivo con propuesta; como consecuencia de los resultados obtenidos se puede afirmar que el 95% de los estudiantes que forman parte de la muestra de estudio y que fueron evaluados mediante un test validado por docentes expertos en el área de matemática, se ubican en un nivel de inicio en la capacidad de demostración matemática, por lo que se espera que esta propuesta sea aplicada por los docentes que requieran mejorar o desarrollar su capacidad de demostración matemática, considerando cada una de las fases didácticas que propone el modelo PIPAB.

El presente trabajo de investigación está organizado en 4 capítulos organizados sistemáticamente y siguiendo los lineamientos y protocolos de investigación de la Universidad César Vallejo, del siguiente modo:

PRIMER CAPÍTULO: En él se aborda el problema del aprendizaje de las matemáticas en general y de las demostraciones matemáticas en Educación Superior en particular. Se lleva a cabo la formulación del problema en forma de interrogante, la justificación y limitaciones de investigación y los objetivos generales y específicos.

SEGUNDO CAPÍTULO. Se aborda el marco teórico, refiriéndose al pensamiento abstracto, los fundamentos epistémicos en matemáticas: el logicismo, el intuicionismo, el formalismo, el convencionalismo y constructivismo para comprender la evolución histórica del pensamiento científico de la matemática. Además de teoría y enfoques referidos a la demostración matemática, sus métodos y un resumen del cálculo diferencial.

TERCER CAPÍTULO. En este se brinda información referida al tipo de investigación: cuantitativa, no experimental y proyectiva (propositiva), se describe el diseño, su gráfica, las variables, población y muestra, las técnicas e instrumentos utilizados para el recojo de datos.

CUARTO CAPÍTULO. En él se plasma detalladamente la propuesta, la presentación y discusión de resultados, estableciendo finalmente las conclusiones y recomendaciones correspondientes.

CAPÍTULO I

EL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

I. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

1.1. Descripción del problema

El aprendizaje de la Matemática ha sido y viene siendo un problema álgido por resolver en países como el nuestro. El complejo tema del desarrollo de la competencia matemática viene siendo abordado por Instituciones públicas y privadas en todo el orbe. La competencia matemática se considera condicionante para el desarrollo personal, ciudadano, inclusión social y la empleabilidad en un mundo de la información y conocimiento.

Así es como se publica en la Red Eurydice (2012) que la Unión Europea, dentro del Marco Estratégico para la Cooperación Europea en el ámbito de la Educación y la Formación, plantea que: “para el año 2020, el porcentaje de jóvenes de 15 años con escasa competencia lectora, matemática y científica ha de ser inferior al 15%”. (p.7)

Este propósito europeo nos indica que para dicho año el 85% de estudiantes de 15 años, por lo menos tendrán un desempeño de regular a excelente en competencia lectora, matemática y científica. Mientras que en nuestro país casi la mayoría de nuestros estudiantes no desarrollan mínimamente dichas competencias.

Las evaluaciones e informes internacionales así lo demuestran, como los de PISA (Programme for International Student Assessment), que en español se traduce como Programa para la Evaluación Internacional de Estudiantes, proyecto conducido por la OCDE (Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico), evaluaciones que se aplican, según el Informe (MED, 2012), a estudiantes de entre 15 años de edad, en las áreas de Comprensión lectora, Matemática y Ciencias, evaluaciones que se vienen desarrollando en el mundo desde el año 2000 hasta la última evaluación que se llevó en el año 2015, con una frecuencia de tres años, de las que el Perú ha participado en PISA 2000 Plus, PISA 2009, PISA 2012 y PISA 2015; las evaluaciones PERCE, SERCE y TERCE, respectivamente Primer (1997), Segundo (2006) y Tercer (2013) Estudio Regional Comparativo y Explicativo en Comprensión lectora, Matemática y Ciencias Naturales a estudiantes de tercer y sexto grado de Educación Primaria, de manera no periódica, conducidos por el LLECE (Laboratorio

Latinoamericano de Evaluación de la Calidad de la Educación) y las Evaluaciones censales (ECE) desarrollados por la Unidad de Medición de la Calidad Educativa (UMC) del Ministerio de Educación del Perú aún no hemos obtenido resultados favorables en la Educación básica.

Pero el problema del aprendizaje de la Matemática no solo se da en la Educación Básica, sino también en la Educación Superior, en este nivel la enseñanza y el aprendizaje están centrados fundamentalmente en el rol del docente como mero conocedor y transmisor de conocimientos, dejándose relegado la participación del estudiante en segundo plano como sujeto constructor y reconstructor del conocimiento. El estudiante de Educación Superior es el que desarrolla habilidades de tomar notas o apuntes de lo que explica el docente, de encontrar estrategias para aprobar evaluaciones escritas con ítems o preguntas rebuscadas que movilizan datos o procedimientos que debieron ser memorizados según la explicación del docente.

Es por ello que el aprendizaje de las Matemáticas se vuelve en un tema controversial y de fracaso para muchos estudiantes, lo que conduce a la deserción y desánimo por estudiar disciplinas científicas. Pilot y Osborne, citados por (Ruiz, s.f), afirman:

> Cada vez el número de alumnos que opta por estudiar disciplinas científicas es menor y se preguntan por qué las actuales prácticas de enseñanza de las ciencias han fracasado en términos de desarrollar una adecuada comprensión de ellas. Tal fracaso, consideran puede ser el resultado de algunas metas o "pecados capitales", dentro de los que señalan el mito de la ciencia desvinculada.

Hacer demostraciones matemáticas es comunicar, compartir, orientar ideas matemáticas a otro u otros que entienden el lenguaje matemático, pero este proceso como todo proceso de enseñanza aprendizaje no es sencillo, tiene sus complejidades.

Como se puede notar también en las afirmaciones de Solow (1993), cuando afirma algo muy importante de lo que significa la dificultad tanto para aprender como para enseñar demostraciones matemáticas:

> La incapacidad para comunicar demostraciones de una manera comprensible ha sido perjudicial para estudiantes y profesores en todas las ramas de las matemáticas. Todos aquellos que han tenido la experiencia de enseñar matemáticas y la mayoría de aquellos estudiantes que han tratado de aprenderlas, deben coincidir seguramente en que entender una demostración matemática es una traba para la mayoría de los estudiantes. Muchos de ellos tratan de salvar este obstáculo evadiéndolo, confiando en la indulgencia del profesor para que no incluya demostraciones en los exámenes (p. 7).

Afirma también Solow (1993) que las demostraciones matemáticas no deben ser actos o acciones mecánicas sin comprenderlas, es por ello que afirma:

> En la actualidad todos sabemos que las matemáticas constituyen un tema de fundamental importancia debido a su papel ubicuo en la vida contemporánea. Para que se utilicen eficazmente las matemáticas, sus métodos deben entenderse adecuadamente, de otra forma estaremos en el papel de robots (ineficientes) cuando tratemos de usar las matemáticas y hagamos un esfuerzo indebido con nuestras memorias que son por naturaleza imperfectas (p. 8).

En la entrevista (anexo 01) aplicada a docentes que desarrollan asignaturas en la carrera de matemática de la Universidad Nacional “Pedro Ruiz Gallo” de la ciudad de Lambayeque (UNPRG), refieren que la capacidad demostrativa de los estudiantes de esta carrera es un pilar fundamental en su formación, ellos afirman que “esta capacidad implica la abstracción, generalización y análisis”.

Los docentes señalan que los estudiantes manifiestan temor por las demostraciones, presentando dificultades para realizarlas; y que están más habituados a desarrollar ejercicios y aplicar algoritmos.

Existen asignaturas en ciclos superiores, como Teoría de grupos y anillos que promueve el desarrollo de esta capacidad debido que la asignatura en un 60% aproximadamente de sus contenidos proponen teoremas y propiedades para demostrar.

Los profesores señalan que no conocen ningún trabajo de investigación en la carrera de matemática que haya evaluado esta capacidad, sin embargo consideran que sí sería importante que se realizara este tipo de trabajo para saber en qué nivel se encuentran los estudiantes y qué estrategias se podrían utilizar para que mejoren.

Investigaciones internacionales también nos dan información de las dificultades en relación a la demostración matemática, algunas referidas a la educación secundaria, otras a la educación superior y otras en relación a los profesores de estos niveles educativos. En este sentido cabe mencionar lo expresado por:

Dos Santos & Ortega (2013) consideran que las dificultades del aprendizaje de la matemática en la educación secundaria se deben a las rupturas con el pensamiento lógico-matemático, abandonándose las metodologías demostrativas y el rigor matemático.

Los estudiantes tienen conceptos erróneos en relación con las demostraciones, creen que justificaciones falsas son demostraciones, considerando que el problema reside en la repetición y memorización de demostraciones que los profesores priorizan Martin y Harel (citado en Dos Santos & Ortega, 2013).

Existe falta de interés de los estudiantes por las demostraciones ocasionando de este modo que los profesores abandonen las demostraciones matemáticas Van Asch, (citado por Dos Santos & Ortega, 2013).

Bravo & Arrieta (s.f.) sostienen que las demostraciones matemáticas son un punto neurálgico para los estudiantes, aunque no especifica si se refiere a estudiantes de secundaria, bachillerato o universitarios.

Crespo (2007) reconoce que los estudiantes de la educación básica no comprenden la necesidad de las demostraciones de las propiedades y que las distintas formas de pensamiento no son alcanzadas por los estudiantes de la escuela, inclusive por estudiantes de educación superior (p.17).

Crespo & Ponteville (citado en Crespo, 2007) obtienen de sus entrevistas realizadas a docentes del nivel medio, terciario y universitario, el resultado de que los docentes diferencian la idea de hacer demostraciones y la de enseñar a demostrar, y que esta última la realizan pocos docentes (p.18).

De la misma manera, se logra percibir que los estudiantes del segundo ciclo de la carrera de matemática presentan dificultades en cuanto a la demostración matemática, dado que según manifiestan los docentes que los estudiantes están habituados a desarrollar ejercicios y aplicar algoritmos, presentando temor a las demostraciones, motivo por el cual, se ha creído a bien emprender el presente estudio a la problemática de ¿Qué modelo didáctico permite desarrollar la capacidad demostración matemática de los estudiantes universitarios en el Cálculo Diferencial en una Universidad de Lambayeque, 2016?, para lo cual en el desarrollo de la investigación se propondrá el modelo didáctico PIPAB, con la finalidad que permita desarrollar la capacidad de demostración matemática de teoremas relacionados con el Cálculo Diferencial.

1.2. Formulación del problema

¿Qué modelo didáctico permite desarrollar la capacidad demostración matemática de los estudiantes universitarios en el Cálculo Diferencial en una Universidad de Lambayeque, 2016?

1.3. Justificación

Según su conveniencia: la presente investigación resulta muy conveniente para el desarrollo de la capacidad demostración matemática de los estudiantes universitarios que cursan Cálculo Diferencial mediante el modelo didáctico PIPAB.

Según su relevancia social: esta investigación se justifica de manera que ofrece a la sociedad información sobre una propuesta de modelo de PIPAB para desarrollar la capacidad demostración matemática de los estudiantes universitarios en el Cálculo Diferencial, dado que se tiene la necesidad, de implementar un modelo que logre facilitar el aprendizaje de Matemática, ya que se logra percibir que los estudiantes en la actualidad presentan deficiencias al momento de demostrar; es aquí donde se origina la importancia de la investigación.

Según sus implicaciones prácticas: el estudio permitirá desarrollar la capacidad demostración matemática, así como estimar los beneficios que se obtendrán a través de la propuesta del Modelo Didáctico PIPAB.

Según su valor teórico, el estudio se justifica en la aplicación de las teorías de la abstracción matemática y el desarrollo psicogenético de Jean Piaget en el cual está basada la variable de capacidad de demostración matemática, asimismo se ha realizado la búsqueda de evidencias documentales que refuerzan la propuesta del modelo didáctico PIPAB que permite desarrollar la capacidad de demostración matemática de los estudiantes universitarios en el Cálculo Diferencial.

1.4. Limitaciones de la investigación

La presente investigación se llevó a cabo en la Universidad Nacional "Pedro Ruiz Gallo" de la ciudad de Lambayeque de la región del mismo nombre.
Los sujetos de investigación fueron solo estudiantes del segundo ciclo de formación universitaria de la carrera profesional de Matemática que estudian el curso de Cálculo Diferencial.
Poco o limitado acceso a los sujetos de investigación, debido a los trámites burocráticos en una entidad del estado, como es la Universidad Nacional "Pedro Ruiz Gallo".

1.5. Antecedentes

Alcolea (2002), realiza un análisis de la problemática de la demostración especialmente en las que se usa el ordenador, además realiza una caracterización de la demostración desde la perspectiva explicativa, comunicativa, sistematizadora, contribuidora de la comprensión de resultados y como instrumento transmisor de conocimiento y de convencimiento. Las conclusiones a las que llegó este investigador las podemos resumir en las siguientes:

> En matemáticas es necesaria la combinación de la experiencia, intuición y lógica; la introducción de la nueva tecnología puede ampliar y mejorar el ámbito matemático. La validez de una demostración no depende solo

> de su presentación, sino de la coherencia intuitiva de las relaciones conceptuales y su concordancia con las experiencias de los propios matemáticos; la comprobación de las demostraciones mediantes máquinas puede reducir la influencia de la falibilidad humana, pero no puede llevar a pensar en la fijación de verdades absolutas, quienes finalmente aceptan o rechazan una demostración son los matemáticos; el ideal de razonamiento riguroso debe entenderse como un principio regulativo fundamental de la matemática, el ideal de rigor es el límite al que ha de tender toda actividad matemática; los logros matemáticos se deberían evaluar con el patrón del progreso antes que con la verdad absoluta (pp. 30 - 31).

Ibañez (s. f) presenta diferentes dimensiones de la demostración matemática (histórica, epistemológica, Instrumental, cognitiva) y teniendo en cuenta estas dimensiones realiza un análisis de las demostraciones presentadas en once libros de texto utilizados en el bachillerato. Algunos de sus resultados preliminares son los siguientes:

> Casi siempre se trata de demostraciones más o menos completas y rigurosas; no se emplea otro método que el de silogismo; los estilos son uniformes en cada teorema; se encontró variedad en el modo de exposición, puesto que se han encontrado tanto el sintético como el analítico; no hacen ningún comentario acerca de las funciones que cumplen las demostraciones expuestas; la intención que se observa es la de simple verificación; no hay comentarios explícitos con el fin de llamar la atención sobre la clase de razonamiento que se hace, sus características, y sus efectos, o para distinguirlo de otras posibles justificaciones; en ningún caso se ha encontrado una explicación global del proceso, ninguna explicación de las líneas generales que se han seguido, lo que resulta fundamental para su comprensión; en muchos casos también falta un comentario acerca de lo que significa el teorema, de las relaciones que establece, y de su utilidad; muy frecuentemente, no se separa con claridad el enunciado del teorema de su demostración, lo que puede dificultar la distinción del papel que juega cada uno de ellos (pp. 5 - 7)

Martín, Murillo & Fortuny (s.f.) resaltan el trabajo colaborativo en contraposición con el individual, el cual permite a los estudiantes alcanzar metas comunes. Este artículo es la presentación de un proyecto que tiene como objetivo: analizar los beneficios cognitivos que se producen en los alumnos en relación con la adquisición del conocimiento matemático y con la capacidad de argumentar y demostrar en Geometría, cuando desarrollan trabajo colaborativo utilizando medios informáticos. En este sentido pretenden realizar una caracterización del trabajo cooperativo y del aprendizaje colaborativo, hacer un análisis epistemológico del concepto de demostración matemática y de su importancia en el desarrollo de la capacidad de razonamiento y en la adquisición de conocimiento de los alumnos, asimismo tiene el propósito de dar una visión de la situación actual de las investigaciones acerca de la enseñanza y aprendizaje de la demostración matemática y realizar una propuesta de experiencias de demostración con medios informáticos, haciendo un análisis de sus resultados. Su muestra elegida para realizar este estudio son los estudiantes de cuarto año de la Educación Secundaria Española del I.E.S. “Batalla de Clavijo” de Logroño y estudiantes universitarios de la Escuela de Magisterio de Logroño, futuros maestros de educación primaria. Presentan a grandes rasgos su propuesta, la que textualmente dice así:

> Los alumnos reciben la propuesta de actividad a través de la página web o del correo electrónico. b) Individualmente y utilizando Cabri elaboran una primera aproximación de la demostración. El correspondiente archivo de Cabri es enviado al profesor virtual por correo electrónico. c) El profesor sitúa los gráficos correspondientes a los archivos recibidos en el tablero electrónico. d) Los alumnos discuten las respuestas dadas apoyándose en los gráficos que están accesibles, trabajando colaborativamente hasta conseguir entre todos mejorar éstas y llegar a una expresión más completa, aunque no única para todos (p. 8).

Bombal (2010) muestra con algunos ejemplos tomados de la historia, la evolución de la noción de demostración correcta y la noción de rigor matemático, llegando a la conclusión que actualmente dada la inmensa cantidad de teoremas en la matemática es imposible que los matemáticos demuestren todo, ni siquiera una parte de teoremas correspondiente a un área específica de las matemáticas. Según el análisis que realizó con ejemplos de la historia de las matemáticas, sostiene que en algunos casos, en “último término, la aceptación de un resultado como correcto se establece por consenso entre los cualificados” (Bombal, 2010, p. 78) y que frente a las diferencias de opinión, éstas se resuelven con la comunicación y explicación, “nunca por la transcripción de la demostración al cálculo de predicados de primer orden” (Bombal, 2010, p. 78).

Dos Santos & Ortega (2013) describen problemas y sentimientos, creencias, afinidades y actitudes del profesorado sobre la demostración, cuyos resultados lo presentamos organizados en la siguiente tabla:

Tabla N° 01

Problemas y sentimientos, creencias, afinidades y actitudes del profesorado sobre la demostración matemática.

Criterio	Tipo de profesor	Descripción
Según la forma de convencer y persuadir	Exacto	Aquel que considera como cierto lo que ha sido demostrado rigurosamente.
	Intuitivo	El profesor que considera argumentos intuitivos y evidentes.
	Maleable	Es el profesor que defiende que la forma de convencer y persuadir depende de la situación.
Según las competencias del profesor de matemáticas	Pro-demostrativo	Considera que la demostración es una competencia esencial en el profesor.
	Anti-demostrativo	No incluye la demostración en las competencias fundamentales del profesor.

	neutro	Deja que el programa se encargue de las competencias del profesor.
Sobre para quién deben ser las demostraciones	Abierto/extensivo	Considera que las demostraciones son esenciales para todos los alumnos.
	Cerrado/restringido	Piensa que las demostraciones deben ser solo para algunos.
Respecto a la desaparición gradual de la demostración matemática	Descontento	Le preocupa la desaparición de la demostración matemática en las asignaturas de matemática.
	Indiferente	No le preocupa la desaparición de la demostración matemática en la educación.
Respecto a la indiferencia de los alumnos ante una demostración	Rendido	Desiste de realizar demostraciones frente al rechazo de los estudiantes.
	Persistente	Intenta siempre hacer demostraciones a pesar del rechazo de los estudiantes.
Respecto a la diferencia entre	Informado	Manifiesta conocer la metodología de las pruebas matemáticas.

esquemas, métodos y tipos de prueba	Desinformado	Desconoce las pruebas matemáticas.
	Impreciso	Presenta confusiones respecto a las pruebas matemáticas.
Según la conexión con los diferentes tipos de inteligencia	Consistente	Asocia el aprendizaje de la demostración con bastantes tipos de inteligencia.
	Inconsistente	Solo relaciona el aprendizaje de la demostración con algunos tipos de inteligencia.
Según la forma de cómo demostrar	Clásico/formal	Parte de lo general para lo concreto, de la demostración para los ejemplos, usando lenguaje y razonamientos formales.
	Concreto/práctico	Parte de lo concreto para lo general, de los ejemplos para la demostración, usando lenguaje y razonamientos intuitivos.
	Didáctico	Articula la forma de presentar las demostraciones según las situaciones.
Posición sobre los esquemas de pruebas de los estudiantes	Evolucionista	Considera las formas de pensar de los estudiantes para mejorar

		la comprensión de las demostraciones.
	Arbitrario	Considera algunas veces los mecanismos de prueba y razonamiento de los estudiantes
	Egocéntrico	No tiene interés por los estados de maduración de los esquemas de razonamiento de sus estudiantes.
Según la disposición de demostrar	Demostrativo	Demuestra todas o casi todas las propiedades que presenta.
	Argumentativo	Justifica las propiedades con ejemplos u otras formas, pero no demostrando.
	Selectivo/flexible	Algunas veces demuestra otras no, dependiendo de la situación del momento.
Según el afecto o gusto por las demostraciones	Aficionado	Le gustan las demostraciones
	Reacio	No le gustan las demostraciones
	Indiferente	No le gustan ni le disgustan.
Sobre la enseñanza de las demostraciones	Favorable	Se muestra a favor de las demostraciones para el aprendizaje de las matemáticas y para el razonamiento.

	Contrario	No ve ningún beneficio educativo en las demostraciones.
	Imparcial	No está en contra ni en favor de las demostraciones, depende del contexto, del alumnado y de la demostración en sí.
Sobre el uso y acreditación de las pruebas informáticas	Informático	Cree en la posibilidad de hacer pruebas informáticas y en su fiabilidad.
	Matemático	No creen en la fiabilidad de las pruebas informáticas.
	Indeciso	Cree que algunas pruebas pueden ser informáticas y tienen cierto grado de fiabilidad.
Sobre el uso de recursos que apoyan la enseñanza de la demostración	Tradicionalista	Usa explicaciones verbales y escritas, y esquemas.
	Inductivos	Utilizan argumentos informales, esquemas de los alumnos, ejercicios y ejemplos.
	Innovadores	Utilizan recursos electrónicos: pruebas informáticas, multimedia, visualizaciones.
En cuanto al tipo de prueba que utilizan	Explicativo	Prefiere las demostraciones con

		características explicativas, mezcla razonamientos inductivos y deductivos.
	Formal	Conceden prioridad a las demostraciones formales, sean explicativas o no.
	Estático	No se preocupa de las particularidades de la demostración.

Fuente: Dos Santos & Ortega (2013, pp. 32-42)

Según lo manifestado por Santos & Ortega (2013) quien expresa quince (15) criterios de evaluación que deben considerarse en la evaluación de la demostración por parte de los profesores, cabe destacar los diversos tipos de profesores considerados; dentro de los criterios a evaluar se debe tener presente la forma de convencer y persuadir, seguido de las competencias del profesor de matemática, también saber para quién deben ser las demostraciones, así como la desaparición gradual de la demostración matemática; por otro lado considerar la indiferencia de los alumnos ante una demostración, luego la diferencia entre esquemas, métodos y tipos de prueba, asimismo la los diferentes tipos de inteligencia, por consiguiente la forma como demostrar y los esquemas de prueba de los estudiantes; por otro lado, cabe tener presente la disposición de demostrar y el afecto o gusto por las demostraciones, también es importante considerar como criterio la enseñanza de las demostraciones y el uso o acreditación de las pruebas informáticas; finalmente se debe considerar el uso de los recursos que apoyan la enseñanza de la demostración y el tipo de prueba que utilizan.

1.6. Objetivos

1.6.1. General

Proponer un modelo didáctico PIPAB para desarrollar la capacidad demostración matemática de los estudiantes universitarios en el cálculo diferencial.

1.6.2. Específicos

1. Diagnosticar cuáles son las opiniones que tienen los docentes y la capacidad de los estudiantes respecto de las demostraciones matemáticas en cálculo diferencial, que realizan los estudiantes del segundo ciclo de la carrera profesional de Matemática de la Universidad Nacional Pedro Ruiz Gallo (UNPRG).
2. Analizar y sintetizar las teorías referentes a la didáctica de las demostraciones matemáticas en cálculo diferencial.
3. Diseñar el modelo didáctico para desarrollar la capacidad de la demostración matemática en el cálculo diferencial en los estudiantes universitarios.
4. Validar el modelo didáctico para desarrollar la capacidad de la demostración matemática en el cálculo diferencial en los estudiantes universitarios.

CAPÍTULO II

MARCO TEÓRICO

II. MARCO TEÓRICO

2.1. CAPACIDAD DEMOSTRACIÓN MATEMÁTICA

2.1.1. Pensamiento abstracto en los adolescentes y jóvenes

Según Piaget (citado por Papalia, Wendkos & Duskin,1998) refiere que el nivel más alto del desarrollo cognoscitivo es el de las operaciones formales, iniciándose alrededor de los 12 años, es en este nivel en el que las personas alcanzan la capacidad de pensamiento abstracto, permitiendo a la persona "imaginar posibilidades, demostrar hipótesis y formar teorías" (p. 644).

Alrededor de los 12 años se inicia el nivel de las operaciones formales, pero el pensamiento va progresando fruto de factores neurológicos (de madurez) y del ambiente, así a los 15 años el adolescente resuelve problemas de modo más sistemático, es capaz de plantear una hipótesis y de diseñar un experimento para demostrarla. A medida que el cerebro del adolescente madura y el entorno social es más amplio, el adolescente tiene más oportunidades para la experimentación y el crecimiento cognoscitivo, más todavía cuando los desafíos son mayores. Sin embargo, "las personas que son capaces del pensamiento formal no siempre lo utilizan" (Papalia, Wendkos & Duskin, 1998, p. 646 - 647). Asimismo, "la capacidad para considerar y probar posibilidades de manera sistemática se aplica a toda clase de problemas, la capacidad para pensar en abstracto también tiene implicaciones emocionales" (Papalia, Wendkos & Duskin, 1998, p. 648).

> Críticos a Piaget, afirman que "el razonamiento formal no es el único aspecto, y quizás ni siquiera el más importante, del pensamiento maduro". Es importante también considerar la influencia de la experiencia en intuición en la solución de problemas prácticos y el sentido común que ayuda a las personas a enfrentar un mundo con frecuencia caótico" (Papalia, Wendkos & Duskin, 1998, p. 648).

Según la teoría de Piaget donde manifiesta que a la edad de 15 años el estudiante puede plantearse hipótesis, resolver problemas y diseñar alguna forma de demostración de modo más sistemático, sin embargo las personas que son capaces del pensamiento formal no siempre lo utilizan. Por otro lado manifiesta que la capacidad para pensar en abstracto tiene implicancia a nivel emocional, por lo manifestado la presente teoría evidencia que la capacidad demostración matemática se debe aplicar a estudiantes universitarios puesto estos ya tiene más de 15 años de edad.

2.1.2. Los fundamentos de las matemáticas

2.1.2.1. El logicismo

Se considera a Gottlob Frege como el fundador de la lógica simbólica moderna. Basándose en estudio anteriores de los siglos XVII y XVIII y el desarrollo de los matemáticos del siglo XIX retomó la teoría de Leibniz de la evidencia lógica aritmética.

Manteniéndose Frege en una lógica kantiana afirmó que la aritmética no era sintética a priori sino analítica.

Para Frege (citado por Ruiz, 1998), afirma con mucha razón que la lógica conecta a las leyes más profundas del pensamiento, así se preguntaba y afirmaba:

> ¿No yace la base de la aritmética a mayor profundidad que la de cualquier conocimiento empírico, a mayor profundidad que la de la misma geometría? Las verdades aritméticas gobiernan el campo de lo numerable. Este es el más comprensivo, puesto que a él pertenece no solo lo real, no solo lo intuitivo sino todo lo pensable. ¡Las leyes de los números, así, no deberían estar en íntima unión con los del pensamiento?

Una de las principales preocupaciones de Frege fue la veracidad de las proposiciones de la matemática, además integra los resultados obtenidos por De Morgan o de Edgar Boole, no con el objetivo de "simbolizar" la matemática o "matematizar la lógica", sino la de redefinir la noción de verdad. También eran filosóficas las preocupaciones, porque se ocupaba en su época de las ideas en torno a la naturaleza de la matemática y la lógica.

Según Ruiz (1998), refiere que Frege manifestaba que "la solidez epistemológica de las matemáticas se encontraba en la exhibición de objetos lógicos, objetivos, partícipes de una realidad pero no física ni sensible" (p. 513).

En un artículo publicado por Frege en 1918, denominado "Der Gedanke" mencionaría a objetos (físicos), ideas (representaciones individuales como sensaciones) y pensamientos (reales y no tangibles).

Frege asume que “la axiomática es la columna vertebral de la matemática”, además que “erradicó la intuición de la aritmética”. Añadiría después que los objetos matemáticos viven en un “mundo objetivo” no material, independiente del sujeto.

Según la teoría de Frege refiere que las matemáticas no son externos al ser humano, están en el intelecto, pero no dependen del sujeto, se construyen en él, asimismo expresa que la axiomática es la columna vertebral de la matemática, por lo que erradicó la intuición de la aritmética, de la misma forma manifiesta que los objetos matemáticos viven en un mundo objetivo el cual es no material, independiente del sujeto.

2.1.2.2. El intuicionismo

Los intuicionistas asumen una serie de críticas frente al carácter abstracto de las matemáticas. Para ellos, como Kant, era necesario recurrir a una intuición, ubicarse en un terreno opuesto al axiomatismo y al logicismo. Considerando que los logicistas elevan la lógica a la categoría casi metafísica, para los intuicionistas se trata de un instrumento absolutamente complementario.

Los intuicionistas, colocan como prueba única de verdad a las ideas productos de la intuición.

Respecto de lo que es una demostración matemática, Poincaré (citado por Ruiz, 1998) señala:

> Una demostración matemática no es una simple yuxtaposición de silogismos; son silogismos colocados en un cierto orden, y el orden en el cual están colocados estos elementos es mucho más importante que ellos mismos… […]” (p. 517).

El intuicionismo como doctrina filosófica da preponderancia al conocimiento directo de ciertos objetos o verdades considerados como fundamentales en sus campos respectivos, de objetos o “verdades que se ven”. (Espinoza, 2008).

Lo intuitivamente verdadero, según los intuicionistas es producto y consecuencia de la imaginación concreta y ésta de la percepción directa.

Según Espinoza (2008), el constructivismo del intuicionismo “era muy limitado, se restringe a buscar mecanismos o procedimientos finitistas para una fundamentación de las matemáticas; el alcance de los métodos y el marco teórico en el que se mueven es reducido… [...]" (p. 517).

Recordemos lo que afirma Ruiz (1998) respecto de la evidencia lógica, la evidencia formal y el pensamiento kantiano de los intuicionistas:

> Cuando se pasa de la evidencia lógica (en los logicistas) a la evidencia temporal (en los intuicionistas) sin duda se ha hecho un salto epistemológico. Sin embargo no se trata de una ruptura del racionalismo.
>
> Los intuicionistas atacaron aspectos del paradigma formal y racionalista de las matemáticas, buscaron dar una alternativa filosófica, pero no se alejaron del mito de las verdades infalibles de la razón. Aunque digan los intuicionistas que no se preocupan por los fundamentos de la matemática (Hilbert) sin duda no dejan de intentar la solidificación infalible y absoluta del cuerpo teórico de las matemáticas.
>
> Con una actitud metodológica que elimina grandes partes de la matemática clásica aceptada por la mayoría de los matemáticos, con una vuelta parcial a Kant, se sumaron a las filosofías racionalistas sobre las matemáticas. Al igual que Kant y a diferencia de Leibniz se privilegian elementos no formales (ni lógicos) en su interpretación teórica (lo cual es muy positivo), pero no logran llegar a las raíces más profundas que dan cuenta de la naturaleza de las matemáticas (pp. 517-518).

Un análisis intuitivo respecto de un ente o fenómeno matemático nos puede aportar diferentes sensaciones, como las sensaciones de evidencia y certeza. Estas sensaciones nos hacen sentir seguros de nuestras conclusiones o resultados, sin sentir la necesidad de una rigurosa demostración.

Una cuestión básica de la educación matemática es la de interrelacionar la intuición y las nociones matemáticas, de tal forma que vayan emparejadas y una se interrelacionen biunívocamente, que el concepto matemático vaya con la idea intuitiva y viceversa.

Se ven casos que hay personas que difícilmente desaprendan un concepto aprendido intuitivamente, está arraigado, cree en él (concepto), lo defiende, lo aplica, está convencida, aunque lo aprendido no necesariamente sea cierto.

Por ejemplo algunas personas están convencidas que “en ningún caso un cuadrado es igual a un rombo, que son totalmente diferentes, excepto por sus cuatro lados”, o que “algunos alumnos de los primeros grados de Educación Secundaria comprendan a una fracción con solo elementos positivos, además con el numerador menor que el denominador (fracciones propias) como $\frac{3}{5}$, $\frac{2}{7}$ y no entiendan posteriormente fracciones como $\frac{-8}{-3}$, porque aprendieron intuitivamente a las fracciones.

Esta difícil situación se ha venido repitiendo a lo largo de la historia de la matemática, y ha conllevado a interpretar erróneamente muchas teorías, debido a que no es fácil desprenderse de una convicción de tipo intuitivo.

Según la teoría de Kant a diferencia de Frege, refiere que la axiomatía matemática y el logicismo, son complementarios por el contrario hacen hincapié en la intuición como única prueba de verdad, dado que en un análisis intuitivo respecto de un ente o fenómeno matemático nos puede aportar diferentes sensaciones, como las sensaciones de evidencia y certeza. Estas sensaciones nos hacen sentir seguros de nuestras conclusiones o resultados, sin sentir la necesidad de una rigurosa demostración.

2.1.2.3. El formalismo

Como uno de los máximos representantes del formalismo se tiene a Hilbert, apoyado en ideas kantianas.

Hilbert, gran matemático prusiano, afirma que la matemática no es reducible a nociones y principios lógicos, sino que posee objetos que ella misma describe. Es por ello importante valorar lo que escribe Hilbert (citado por Ruiz, 1990):

> “…algo que se propone al proceder a inferencias lógicas y en la ejecución de operaciones lógicas está ya dado en la representación (Vorstellung). Esto es, ciertos objetos concretos extralógicos, que están intuitivamente presentes en forma de experiencia inmediata y se haya en la base de todo pensamiento. Si el pensamiento lógico ha de estar seguro, estos objetos han de ser susceptibles de examinarse a fondo, en sus componentes, y en la exhibición, la distinción, el orden de sus partes y la disposición de éstos en el espacio, han de estar dados en los mismos objetos, como algo que no puede reducirse a

> nada más ni necesita por lo demás en modo alguno semejante reducción (p. 127).

Se concuerda con Ruiz, que Hilbert se refiere a estos objetos extralógicos o también denominados objetos no lógicos, a objetos matemáticos que no necesitan de la rigurosidad lógica, a objetos que pueden ser comprendidos de manera intuitiva a priori (Kant), o como lo decía Hilbert se trataba de la "intuición del signo".

Por ello Hilbert (1922) (citado por Ruiz, 1990), afirma:

> "Para mi – y en esto me opongo totalmente a Frege y a Dedekind – los objetos de la teoría de números son los signos mismos, de los cuales podemos reconocer la forma en todas sus generalidades y con toda seguridad, independientemente de las circunstancias de lugar y de tiempo, de las condiciones particulares de su presentación y de las diferencias insignificantes que pueden afectar a su trazado. El punto de vista filosófico sólido que considero como indispensable para el fundamento de las matemáticas puras – como cualquier tipo de pensamiento, de comprensión y de comunicación científicos- se puede resumir en esta forma: en el principio – y así nos expresamos aquí – era el signo" (pp. 127,128).

Fue muy importante para Hilbert la simbolización de la matemática. Para él las nociones matemáticas las divide en dos tipos: en perceptibles o en no perceptibles o "ideales". Buscó la combinación o fusión de ambos tipos de nociones con la intención de probar la consistencia lógica del cuerpo teórico construido.

Hilbert propone un programa que pretende probar dicha consistencia de la siguiente manera:

> Requiere entonces hacer una diferenciación de niveles: por un lado la teoría propiamente, que él expresa con números-trazos y las operaciones entre ellos; y, por el otro, una metateoría, que está compuesta por las fórmulas que corresponden a los trazos y sus proposiciones y las reglas formales que corresponden a las de la teoría" (Ruiz, s.f, p. 520)

Según la teoría de Hilberth quien considera relevante la simbolización matemática, dividiendo las nociones en perceptibles y no perceptibles o también denominadas ideales, de la misma manera busco realizar una fusión de ambos tipos de nociones con la finalidad de poder constatar la consistencia lógica que engloba a un cuerpo teórico construido.

2.1.2.4. El convencionalismo

Ruiz (1990), el formalismo rompe con el logicismo, las premisas teóricas del formalismo empujan a cierto formalismo en matemáticas.

Las discusiones entre logicistas, intuicionistas y formalistas no trascendieron las fronteras del racionalismo. Para los representantes de estas tres visiones el objeto o fundamento de la matemática no se encontraba en el mundo material, sino en la mente, en ella están el lenguaje, la lógica, la intuición y la deducción. Con la nueva matemática Ruiz (1990) del siglo XX, con la matemática pura, con los grandes avances de la lógica, los límites de la razón parecían infinitos.

Como se sabe el empirismo, siglo XIX, como corriente filosófica, había ganado mucho terreno al racionalismo, en las matemáticas, se le veía sólido. Todo parecía seguro para los racionalistas a fines del siglo XX, es cierto habían algunos vacíos que llenar, algunas dudas que aclarar, pero había confianza en el progreso de los racionalistas, pero no iba a durar para siempre.

Fue Gödel el que hizo “temblar” a los formalistas con afirmaciones como: “no es posible formalizar una teoría matemática cuando ésta ha llegado a cierto nivel de complejidad” y otras afirmaciones sostenidas por él, como se señalan a continuación:

> En determinados casos, el modelo simbólico no consigue representar de manera adecuada los nexos deductivos que existen en el seno de la teoría bajo su forma intuitiva, no formalizada. En otros casos, el modelo fracasa cuando trata de representar ciertos conceptos intuitivos de la teoría. En cualquier caso, no se puede hacer abstracción de la relación de significación que liga el modelo simbólico al dominio matemático que trata de representar. Llega un momento de la interpretación que no puede ser puesto entre paréntesis. El recurso a la pura intuición del signo, tal como la entendía Hilbert, no es suficiente. La utilización del método formal

> marca un progreso evidente, y ha permitido obtener un cierto número de precisiones de largo alcance sobre la estructura de las teorías matemáticas, pero no dispensa a la matemática de mantener el contacto con ciertas intuiciones previas a la formalización y que ésta sólo puede ayudar a clarificar (Ruiz, s.f, p. 522).

Estas críticas rompieron con el absolutismo del formalismo, éstas establecen que no es posible desterrar la intuición de la ciencia matemática.

Para Gödel (citado por Ruiz, s.f) "Es imprescindible recurrir a la intuición. Y no me refiero a esa apelación subjetiva a la que recurren intuicionistas de diferentes formas. Me refiero a la intuición que encuentra su lugar en la realidad del contacto material del sujeto con el objeto" (p. 523).

Según la teoría de Gödel, quien limita el absolutismo del formalismo, debido a que sostiene que no es posible lograr formalizar una teoría matemática cuando ésta ha llegado a cierto nivel de complejidad; asimismo refiere que es imprescindible recurrir a la intuición, no refiriéndose a la intuición como apelación subjetiva a la cuál recurren los intuicionistas sino a la intuición que encuentra lugar en la realidad del contexto material del sujeto con el objeto.

2.1.2.5. El constructivismo

Se citará lo más relevante del programa de Brouwer, matemático holandés, en la que obtiene importantes conclusiones como: "...la investigación de la construcción mental matemática como tal, sin referencia a preguntas acerca de la naturaleza de los objetos construidos, como si estos objetos existen independientemente de nuestro conocimiento de ellos" (Ruiz, 1990, p. 133)

El objetivo fundamental de los intuicionistas no son los aspectos formales de la ciencia matemática, sino más bien el tipo de razonamiento que se realiza, quiere decir que el enfoque está en los procesos constructivos que se llevan a cabo en el actor matemático.

Así se afirma que "…el intuicionismo procede independientemente de la formalización, lo cual solo puede seguir después de la construcción matemática" (Ruiz, 1990. p. 133).

Según la teoría del constructivismo bajo el programa de Brouwer, matemático holandés quien resalta la importancia de la investigación de la construcción mental matemática bajo procesos constructivos relacionados con objetos construidos, como si estos objetos existieran independientemente de nuestro conocimiento sobre ellos.

2.1.3. Demostración matemática

Según Solow (1993), es un método formal que permite demostrar dadas dos proposiciones *A* y *B* que "si *A* es verdadero, entonces *B* es verdadero", lo cual es equivalente a "*A* implica *B*". (pp. 18; 20). Esto significa en las palabras de Solow que "una demostración de la proposición ´*A* implica *B*´ no es un intento de verificar si *A* y *B* son verdaderos, sino demostrar que *B* es una consecuencia lógica de haber supuesto que *A* es verdadero" (p. 21).

Solow (1993) desde el punto de vista de la comunicación considera a la demostración como "un método para comunicar una verdad matemática a otra persona que también 'habla' el mismo idioma" (p. 17).

Desde el punto de vista argumentativo, Solow (1993) sostiene que la demostración es "un argumento convincente expresado en el idioma de las matemáticas (…) deberá contener suficientes detalles matemáticos para poder convencer a la(s) persona(s) a quien(es) está dirigida (…) una prueba dirigida a un estudiante de bachillerato requerirá una explicación detallada" (p. 19).

Balacheff & Duval (citado por Godino & Recio, 2001, p. 406) considera la demostración como "secuencia de enunciados organizados según reglas determinadas", su objeto es la verdad y obedece a criterios de validez.

No se debe dejar de lado la definición dada por Gonzales (2010) en la que afirma que una demostración matemática "es un razonamiento o proceso de deducción lógica que partiendo de una hipótesis nos permite llegar a una tesis o conclusión".

2.1.4. Métodos de demostración matemática

Se presenta a continuación los principales métodos de demostración matemática

Teniendo en cuenta a Morales (2008) refiriéndose a los métodos de demostración indica tres tipos: directo, indirecto y por inducción. Además respecto de lo que es una demostración afirma que:

> Un método de demostración es un esquema argumentativo válido con fundamento lógico no perteneciente en si a la matemática sino como elemento propio de una metateoría. La validez de la argumentación radica en la veracidad de las hipótesis consideradas para deducir una conclusión.
>
> Los métodos de demostración estudiados aquí son:
>
> - Método directo de demostración
> - Método indirecto de demostración: por reducción al absurdo o por contraposición.
> - Método de Inducción matemática

Analicemos cada uno de los métodos de demostración planteados:

2.1.4.1. Demostración directa

Los elementos principales que se observan en una demostración directa o método directo de demostración son tres: los fundamentos o hipótesis, consecuencias directas o deducciones posteriores a la hipótesis y la tesis o conclusión final.

Los procedimientos de demostración establecen la conexión lógica entre los fundamentos y sus consecuencias sucesivas, hasta llegar a la tesis o conclusión final.

Las diferentes formas de ordenar los elementos de la demostración (fundamentos, consecuencias directas, conclusión final) establecen diferentes tipos de procedimientos demostrativos, a saber: demostración directa y demostración indirecta.

Según UDEA (s.f) si H es la hipótesis y T es la tesis, se tiene que la demostración directa del teorema $H \Rightarrow T$ es el procedimiento que nos prueba la verdad de T mediante una serie finita de inferencias de los elementos de H".

En matemáticas no se acepta una proposición como verdadera hasta que se construye su demostración formal, aunque la proposición sea válida para un número finito de casos no significa que sea válida para todo el universo, por ejemplo la conjetura de Goldbach se ha verificado utilizando computadoras para millones de casos pero a pesar de ello no se acepta como verdadera.

Tengamos en cuenta lo que Morales (2008) afirma respecto del método directo de demostración:

> En el método de demostración directa se tiene como hipótesis verdaderas las proposiciones H_1 y H_2 y $\cdots$ y H_n procediendo a la deducción de que la conclusión Q es verdadera a través de un proceso lógico deductivo, es decir como una cadena de implicaciones lógicas. El esquema de demostración en el método directo es de la forma:
>
> Si H_1 y H_2 y $\cdots$ y H_n entonces Q
>
> en forma simbólica: $H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_n \Rightarrow Q$
>
> El método de demostración directo tiene como fundamento lógico la regla de inferencia clásica o esquema argumentativo válido llamado: Modus ponendo ponens.
>
> $P \wedge (P \rightarrow Q) \Rightarrow Q$ Modus ponendo ponens, que significa: si la hipótesis P es verdadera y la hipótesis P implica la conclusión Q entonces la conclusión Q es verdadera.

Un ejemplo de demostración directa se presenta a continuación:

En el teorema: $\lim_{x \to a} \frac{1}{x^n} = 0, d\epsilon \quad q \quad S\ x > N; \quad \left|\frac{1}{x^n}\right| < \varepsilon \Rightarrow N = \sqrt[n]{\frac{1}{\varepsilon}}$

PASO	AFIRMACIÓN	JUSTIFICACIÓN
1	$\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0;\ t\ .x > N \Rightarrow \left\lvert\frac{1}{x^n} - 0\right\rvert < \varepsilon$	Por definición
2	$\square\varepsilon > 0, \square N > 0;\ t\ .x > N\ \square\ \frac{1}{\lvert x^n\rvert} < \varepsilon \ldots$ (i)	Axiomas operaciones en ℝ
3	$S\ x > N > 0\ \square\ \lvert x\rvert^n > N^n$	Desigualdad en ℝ
4	$S\ \lvert x\rvert^n > N^n\ \square\ \frac{1}{\lvert x\rvert^n} < \frac{1}{N^n} < \varepsilon$	Desigualdad en ℝ
5	$S\ \frac{1}{\lvert x\rvert^n} < \frac{1}{N^n}\ \square\ \frac{1}{\lvert x\rvert^n} < \varepsilon\ \square\ \frac{1}{N^n} = \varepsilon$	Axioma de orden transitivo y teorema de desigualdad
6	$S\ \frac{1}{N^n} = \varepsilon\ \square\ N = \sqrt[n]{\frac{1}{\varepsilon}}$	Teoremas de radicación en ℝ
	Luego, se demuestra que:	
7	si x>N $\square\ \left\lvert\frac{1}{x^n} - 0\right\rvert < \varepsilon\ S \quad q \quad N = \sqrt[n]{\frac{1}{\varepsilon}}$	Lqqd.

2.1.4.2. Métodos de demostración indirectos

El método de demostración directa no siempre es aplicable debido a la naturaleza de las proposiciones a demostrar, por lo que es necesario realizar una demostración indirecta las cuales son ampliamente usadas en matemáticas, a continuación algunos de los métodos usuales de demostración indirecta (Morales, 2008).

Los métodos de demostración indirectos que se estudian son: el de reducción al absurdo y demostración contrapositiva.

a. Método de demostración por reducción al absurdo

Tendremos en cuenta la información vertida por Morales (2008), respecto de este método de demostración:

> Se atribuye al filósofo griego Zenón de Elea, alrededor del siglo V a.C., la invención del método de reducción al absurdo que utilizaba en sus argumentos y en sus famosas paradojas. Desde entonces es un método ampliamente aplicado en matemáticas.
>
> El procedimiento general para demostrar indirectamente por reducción al absurdo una proposición de la forma
>
> $\left(H_1 \wedge H_{2,} \wedge \ldots \wedge H_n\right) \Leftrightarrow Q$ consiste en:
>
> R1) Negar la conclusión Q utilizando las leyes de la lógica, la negación de Q es denota por $\sim Q$ que se lee “no Q”
>
> R2) El conjunto de hipótesis ahora es de la forma:
>
> $H_1 \wedge H_2 \wedge H_3 \ldots \wedge H_n \wedge \sim Q$, es decir que $\sim Q$ se añade como una hipótesis.
>
> R3) Del conjunto de hipótesis enunciadas en R2) obtener una contradicción evidente, una contradicción es una proposición que siempre es falsa y es denotada por C, en forma simbólica:
>
> $H_1 \wedge H_2 \wedge H_3 \ldots \wedge H_n \wedge \sim Q \rightarrow C$, es decir que el conjunto de hipótesis $\left\{H_1, H_{2,}, \ldots H_n, \sim Q\right\}$ es inconsistente o contradictorio.
>
> R4) entonces Q es verdadera por la obtención de una contradicción al suponer verdadera la negación de Q.
>
> Aristóteles fundamento lógicamente la demostración por reducción al absurdo en dos principios: principio de no contradicción $\sim(P \wedge \sim P)$ considerada ley suprema de la lógica según Kant y Aristóteles, que significa que una proposición no es verdadera y falsa simultáneamente y el principio del tercero excluido $(P \vee \sim P)$ que significa que una proposición es verdadera o falsa. Si no son aceptados los principios anteriores, el método de reducción al absurdo carece de fundamento lógico.

El fundamento lógico del método de reducción al absurdo es la equivalencia lógica llamada precisamente reducción al absurdo: $(P \to Q) \Leftrightarrow [(P \wedge \sim Q) \to C]$

donde P es de la forma $H_1 \wedge H_2 \wedge H_3 \ldots \wedge H_n \to Q$ y C denota una contradicción.

Cuando solamente se afirma una proposición Q sin ninguna hipótesis, como por ejemplo: ® es transcendental, entonces la veracidad de Q se obtiene de la regla de inferencia:

$$(\sim Q \to C) \to Q$$

b. Método de demostración por contrapositiva.

Consideremos lo que escribe Morales (2008, p.48) respecto de este método:

> El método de demostración por contrapositiva es un método indirecto que tiene como fundamento la equivalencia lógica
>
> $$(P \to Q) \Leftrightarrow (\sim Q \to \sim P)$$
>
> Para realizar una demostración por contrapositiva se toma como hipótesis la negación de la conclusión escrita como $\sim Q$ para obtener como conclusión la negación de la hipótesis escrita como $\sim Q$. El esquema argumentativo de la deducción por contrapositiva es de la forma:
>
> $$\begin{array}{l} \sim Q \\ \underline{\sim Q \to \quad \sim P} \\ \qquad \sim P \end{array}$$

2.1.4.3. Método de demostración por el principio de inducción matemática.

Se tendrá en consideración lo que escribe Morales (2008, p.50) respecto de este método:

> El principio de inducción matemática es un principio universalmente válido en matemáticas y es fundamentalmente uno de los axiomas de los números naturales construidos por el matemático italiano G. Peano a finales del siglo XIX, insistimos

en que es un axioma que formalmente pertenece a la lógica de segunda clase al cuantificar propiedades de números naturales, sin embargo, por un tratamiento de letra predicativa como un parámetro se considera al principio de inducción matemática como un axioma en la lógica de primer orden.

Las demostraciones por el principio de inducción matemática se consideran indirectas. El principio de inducción matemática es utilizado para demostrar la veracidad de proposiciones $P(n)$ donde n es un número natural mayor que un valor inicial n_0, el principio de inducción matemática consiste en:

i) inicialmente se verifica que la proposición $P(n)$ es verdadera para $n = n_0$, es decir $P(n_0)$ es verdadera.

ii) Se enuncia la hipótesis de inducción: $P(k)$ es verdadera para el número natural k.

iii) Usando la hipótesis de inducción enunciada en (ii) y otras proposiciones verdaderas demostradas anteriormente se demuestra que $P(k+1)$ es verdadera.

iv) La conclusión consiste en que $P(n)$ es verdadera para todo $n \geq n_0$.

2.1.5. Razonamiento

Balacheff (citado por Godino & Recio, 2001), el razonamiento es "la actividad intelectual, la mayor parte del tiempo no explícita, de manipulación de informaciones para producir nuevas informaciones a partir de datos" (p.406). Según Godino & Recio (2001), el razonamiento no se reduce a la manipulación de informaciones, da origen a las prácticas argumentativas, personales o institucionales, constituyendo esto su dimensión ostensiva y comunicacional, a la vez que se desarrolla por medio de dichas prácticas (p.406).

2.1.6. Razonamiento deductivo

Smith & Kosslyn (2008) sostienen que “muchos teóricos, de Aristóteles en adelante, han creído que el razonamiento deductivo representa uno de los logros más altos del pensamiento racional” (p. 461).

Según Godino & Recio (2001, p. 407), en lógica y fundamentos de las matemáticas, “la noción de *demostración* están íntimamente ligada a las nociones de *deducción* y de *sistema axiomático* (*o formal*)”.

2.1.7. Silogismo

Se le considera como una herramienta que se utiliza para estudiar el razonamiento deductivo” (Smith & Kosslyn, 2008, p. 461).

El silogismo es un “un argumento que consiste en dos afirmaciones y una conclusión. La conclusión puede ser tanto cierta como falsa. Una conclusión que se sigue de premisas dadas por las leyes de la lógica deductiva es una conclusión válida” (Smith & Kosslyn, 2008, p. 461).

“La idea básica del razonamiento deductivo es que una conclusión válida se sigue de las premisas como una cuestión de necesidad lógica (lo que no es el caso en el razonamiento inductivo, donde las conclusiones no son necesariamente ciertas)” (Smith & Kosslyn, 2008, p. 461).

2.1.8. Errores en el pensamiento deductivo

Según Smith & Kosslyn (2008, p. 461), cuando razonamos de forma deductiva, cometemos dos tipos de errores, uno de forma y otro de contenido. Los errores de forma se refieren la forma estructural o formato de la relación entre la premisa y la conclusión, en cambio los errores de contenido “resultan cuando el contenido del silogismo es demasiado influyente”.

2.1.9. Enfoques de la matemática

2.1.9.1. Visión clásica de la matemática: Según este enfoque la matemática se encuentra fuertemente unida al razonamiento lógico, existe un vínculo entre la lógica y la matemática, este enfoque incluye la consideración de la matemática como ciencia deductiva debido a que muchos de sus resultados se obtienen a partir de otros utilizando leyes lógicas (Crespo, 2007, p. 15).

2.1.9.2. Enfoque socioepistemológico: Crespo (2007) indica que “la matemática educativa, a través del enfoque socioepistemológico de los conceptos permite un acercamiento múltiple a los aspectos que éstos poseen y a los escenarios socioculturales en los que los conocimientos matemáticos surgen, se desarrollan y se transmiten” (p. 68).

2.1.10. Origen del Cálculo Diferencial

Newton estableció las bases del cálculo diferencial, siendo la derivada de una función su concepto fundamental. Problemas provenientes de la física como por ejemplo determinar la velocidad de un cuerpo rectilíneo en un instante dado, condujeron a Newton al concepto de derivada (Aguilar, Bravo, Gallegos, Cerón & Reyes, 2009, p.1009) y (Pita, 1998, p.158).

Por su parte, Leibniz planteo el concepto de derivada de una función a partir de una recta tangente a una curva.

Por esta razón, Pita (1998, p.58) afirma que tanto Leibniz como Newton en el siglo XVII llegaron a concebir uno de los conceptos más grande de la matemáticas conocida como derivada, aunque inicialmente fue una idea poco clara. Este importante descubrimiento del siglo “permitió a los matemáticos calificar los secretos de los objetos movimiento de los planeta y la atracción gravitacional de los conceptos que cambian su posición respecto a tiempo”.

2.1.11. Contenido del Cálculo Diferencial

En el área del cálculo diferencial se estudia el límite de una función, la continuidad de una función y la derivada de una función. Por esta razón presentamos a continuación un resumen de las definiciones y teoremas principales abordados en el cálculo diferencial.

2.1.11.1. Límite de una función:

Definición intuitiva de límite:

Es importante conocer el comportamiento de una función $f(x)$, cuando los valores de la variable independiente "x", estén muy cerca de un número específico que llamaremos x_0.

El límite de una función $f(x)$, cuando la variable x se aproxima a un valor dado x_0, es el número real "L", (siempre que exista), al cual se aproxima la función, esto se simboliza:

$$\boxed{\lim_{x\to x_0} f(x) = L}$$

Se lee: "El límite de $f(x)$ cuando *x* tiende a x_0 es L"

Teoremas de límites:

Teniendo en cuenta a Budnick (2007, p.700), los principales teoremas de límites son:

Teorema de límite 1:

Si *k* es una constante y *a* un número cualquiera, entonces:

$$\lim_{x\to a} k = k$$

Teorema de límite 2:

Para cualquier número dado *a*

$$\lim_{x\to a} x = a$$

Teorema de límite 3:

Si *m* y *b* son dos constantes cualesquiera, entonces

$$\lim_{x\to a} (mx + b) = m.a + b$$

Teorema de límite 4:

Si $\lim_{x\to a} f(x) = L$ y $\lim_{x\to a} g(x) = M$, entonces

$$\lim_{x \to a} [f(x) \pm g(x)] = L \pm M$$

$$\lim_{x \to a} [f(x).g(x)] = L.M$$

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}, \ g(x) \neq 0$$

$\lim_{x \to a} [k.f(x)] = k.L$, siendo k una constante

Teorema de límite 5:

Si $f(x) = L$ y n es un número entero positivo, entonces:

$$\lim_{x \to a} [f(x)]^n = \left[\lim_{x \to a} f(x)\right]^n = L^n$$

Teorema de límite 6:

Si f es un polinomio y a es un número real, entonces:

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

Teorema de límite 7:

Si $\lim_{x \to a} f(x) = L$ y n es un número entero positivo, entonces:

$$\lim_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \to a} f(x)} = \sqrt[n]{L}$$

Límites indeterminados:

Requieren el uso de métodos algorítmicos para ser resueltos:

$$\infty - \infty \ ; \quad \frac{\infty}{\infty} ; \quad 0 \cdot \infty ; \quad 1^{\infty} ; \quad \frac{0}{0}$$

Cada indeterminación implica el aprendizaje de un método para ser resuelta. Los distintos métodos sólo sirven para un tipo concreto de indeterminación, por eso es básico identificar primero el tipo de indeterminación para aplicar el método correcto.

Una puntualización interesante es resaltar que la existencia del límite implica que dicho límite debe ser finito. Si $\lim_{n \to \infty} a_n = \pm\infty$, la sucesión a_n no tendrá límite pues crecerá o decrecerá indefinidamente (Espinoza, 2012, p.427)

Método de cálculo para cada caso de indeterminación:

Según el autor Espinoza (2012, p.429), los métodos correspondientes a cada de indeterminación y los procedimientos para cada uno son los siguientes:

Indeterminación de la forma: $\frac{0}{0}$ $\qquad \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}$

Caso I: si $f(x)$ y $g(x)$ son polinomios.

Para levantar la indeterminación se factoriza el numerador y el denominador y se cancela el factor $(x - x_0)$

Caso II: si $f(x)$ y $g(x)$ son fracciones irracionales.

Para levantar la indeterminación se racionaliza y se cancela el factor $(x - x_0)$

Indeterminación: $\frac{\infty}{\infty}$ $\qquad \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\infty}{\infty}$

1.- Buscamos el término de mayor grado, tanto del numerador como del denominador

2.- Dividimos todos los términos de la fracción algebraica por el término de mayor grado anterior

3.- Aplicamos las propiedades de los límites y calculamos la solución.

Indeterminación: $\infty - \infty$ $\qquad \lim_{x \to x_0} [f(x) - g(x)] = \infty - \infty$

1.- Comprobamos que el límite que nos presentan corresponde a esta indeterminación.

2.- Realizamos las operaciones y reducciones que correspondan

3.- Nos queda una indeterminación del tipo $\frac{\infty}{\infty}$ que resolvemos aplicando los métodos de la indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$

Indeterminación: 1^{∞} $\qquad \lim_{x \to x_0} [f(x)]^{g(x)} = 1^{\infty}$

La indeterminación 1^{∞} no es el número 1 elevado a una sucesión que tiende hacia infinito sino una sucesión que tiende hacia 1 elevada a otra sucesión que tiende hacia ∞.

Límites laterales:

Definición:

Una función $f(x)$ tiene límite en “a” si los límites laterales en “a” son iguales; esto es:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = L$$

(Espinoza, 2012, p.401)

Limites trigonométricos

Los límites trigonométricos se pueden resolver aplicando un límite notable o una identidad trigonométrica y en algunos casos se debe aplicar ambas operaciones. A veces es necesario realizar algunas operaciones algebraicas como multiplicar y dividir por un número, factorizar, multiplicar por la conjugada o aplicar las propiedades de los límites, teniendo en cuenta el siguiente límite notable:

$$\lim_{u \to 0} \frac{\operatorname{sen} u}{u} = 1$$

Limites infinitos

Se dice que una función tiene límite infinito cuando:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty$$

Definición:

Siendo $y = f(x)$, diremos que:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{x\to x_0^-} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{x\to x_0^-} f(x) = -\infty$$

Continuidad de una función:

Una función $f(x)$, es continua en x_0 sí y sólo si, se cumplen las siguientes tres condiciones:

i. Existe $f(x_0)$, es decir x_0 pertenece al dominio de $f(x)$.

ii. Existe el $\lim_{x\to x_0} f(x)$, es decir los limites laterales existen y son iguales

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{x\to x_0^-} f(x) \quad .$$

iii. $f(x_0) = \lim_{x\to x_0} f(x)$.

Propiedades:

Según Espinoza (2012, p.470), se identifican las siguientes propiedades:

i. Toda función polinomial es continua en todo su dominio.

ii. Una función racional es discontinua en los puntos donde el denominador es cero, y es continua en cualquier otro punto de su dominio.

iii. Consideremos dos funciones f y g continuas en x_0, entonces: $f + g$ es continua en x_0.

Discontinuidad

Definición:

Sea $f: A \to \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}$, $A = Dom(f)$.

Si x_0 es un punto que pertenece al dominio de f en el cual f no es continua, entonces decimos que f es discontinua en x_0 o que tiene una discontinuidad en x_0.

Clases de discontinuidad

Según Espinoza (2010, p.98), hay dos clases de discontinuidad:

I. Discontinuidad evitable o removible:

Diremos que f tiene una discontinuidad evitable o removible en x_0 sí:

$i.\ \exists\ f(x_0)$

$ii.\ \exists \lim_{x \to x_0} f(x)$

$iii.\ \lim_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$

II. Discontinuidad no evitable o irremovible:

A. Discontinuidad de primera especie

Diremos que f tiene una discontinuidad de primera especie en x_0 sí:

$i.\ \exists\ f(x_0)$

$ii.\ \nexists \lim_{x \to x_0} f(x)$

B. Discontinuidad de segunda especie

Diremos que f tiene una discontinuidad de segunda especie en x_0, si no existe

$\lim_{x \to x_0} f(x)$ o si uno de sus límites laterales es $\pm\infty$.

Derivada de una función

Definición

Siendo $y = f(x)$ una función, se denomina función derivada de f, y se denota por $f'(x)$ a quien llamaremos f prima de x y se denota por:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Propiedades fundamentales

Según Espinoza (2012, p.503), las propiedades fundamentales de las derivadas son:

1. $[k f(x)]' = k \, f'(x)$
2. $[f(x) + g(x)]' = f'(x) + g'(x)$
3. $[f(x) - g(x)]' = f'(x) - g'(x)$
4. $[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
5. $\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]' = \dfrac{f'(x) g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2}$

Fórmulas o reglas usuales de derivación:

1. Si $f(x) = k$, entonces $f'(x) = 0$
2. Si $f(x) = x$, entonces $f'(x) = 1$
3. Si $f(x) = kx$, entonces $f'(x) = k$
4. Si $f(x) = kx + b$, entonces $f'(x) = k$
5. Si $f(x) = x^n$, $n \geq 1$ entonces $f'(x) = n x^{n-1}$

6. Si $f(x) = [u(x)]^n$, $n \neq 1$ entonces $f'(x) = n[u(x)]^{n-1}\, u'(x)$

7. Si $f(x) = e^{u(x)}$, entonces $f'(x) = e^{u(x)}\, u'(x)$

8. Si $f(x) = a^{u(x)}, a > 0$ entonces $f'(x) = a^{u(x)}\, u'(x)\, \ln(a)$

9. Si $f(x) = \ln[u(x)]$, entonces $f'(x) = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$

10. Si $f(x) = \log_b u(x)$, entonces $f'(x) = \dfrac{u'(x)}{u(x)}\, \log_b e$

11. Si $f(x) = sen[u(x)]$, entonces $f'(x) = \cos[u(x)]\, u'(x)$

12. Si $f(x) = \cos[u(x)]$, entonces $f'(x) = -sen[u(x)]\, u'(x)$

13. Si $f(x) = tag[u(x)]$, entonces $f'(x) = \sec^2[u(x)]\, u'(x)$

14. Si $f(x) = ctg[u(x)]$, entonces $f'(x) = -c\sec^2[u(x)]\, u'(x)$

15. Si $f(x) = \sec[u(x)]$, entonces $f'(x) = \sec[u(x)]\, tag[u(x)]\, u'(x)$

16. Si $f(x) = c\sec[u(x)]$, entonces $f'(x) = -\csc[u(x)]\, ctg[u(x)]\, u'(x)$

17. Si $f(x) = arcsen[u(x)]$, entonces $f'(x) = \dfrac{u'(x)}{\sqrt{1-[u(x)]^2}}$

18. Si $f(x) = \arccos[u(x)]$, entonces $f'(x) = -\dfrac{u'(x)}{\sqrt{1-[u(x)]^2}}$

19. Si $f(x) = \mathrm{arc}\,tag[u(x)]$, entonces $f'(x) = \dfrac{u'(x)}{1+[u(x)]^2}$

20. Si $f(x) = \mathrm{arc}\,ctg[u(x)]$, entonces $f'(x) = -\dfrac{u'(x)}{1+[u(x)]^2}$

21. Si $f(x) = arc\sec[u(x)]$, entonces $f'(x) = \dfrac{u'(x)}{u(x)\,\sqrt{[u(x)]^2-1}}$

22. Si $f(x) = arc\csc[u(x)]$, entonces $f'(x) = -\dfrac{u'(x)}{u(x)\,\sqrt{[u(x)]^2-1}}$

Derivadas de funciones compuestas

Sean $y = u(v)$ y $v = w(x)$, entonces $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du}\, \dfrac{du}{dv}\, \dfrac{dv}{dw}\, \dfrac{dw}{dx}$

Derivadas de orden superior

Cuando se deriva una función $y = f(x)$ se obtiene $f'(x)$ que también es una función. Si se deriva esta función la nueva función que se obtiene se denomina **segunda derivada** y se le denota como $f''(x)$. De manera análoga si se derivada de la segunda derivada se obtiene otra función llamada **tercera derivada**. A las derivadas que se obtienen de esta forma se llaman derivadas de orden superior (Espinoza, 2012, p.580).

Las notaciones que se usan para las derivadas de orden superior son:

- $y' = \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{df}{dx}$ primera derivada de $f(x)$
- $y'' = \dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{d^2f}{dx^2}$ segunda derivada de $f(x)$
- $y''' = \dfrac{d^3y}{dx^3} = \dfrac{d^3f}{dx^3}$ tercera derivada de $f(x)$
- $y^{(n)} = \dfrac{d^ny}{dx^n} = \dfrac{d^nf}{dx^n}$ n-ésima derivada de $f(x)$

Derivación implícita

Una función *f*(*x*) está definida implícitamente por una ecuación si y solo si al sustituir "*y*" por *f*(*x*) se llega a una identidad.

Extremos relativos de una función

Los extremos relativos de una función se refieren a los máximos y mínimos de la función.

Máximos y mínimos de una función

En base a lo expuesto por Espinoza (2012, p.628) se tiene la siguiente definición:

Sea f una función derivable en un intervalo I. Entonces:

- f es creciente en I sí y solo si $f'(x) \geq 0, \quad \forall x \in I$

$\rfloor$ f es decreciente en I sí y solo si $f\acute{}(x)\,\Phi 0, \quad \neg x \quad I$

Sea f una función con dominio en el intervalo I. Si $c \quad I$ y si $f\acute{}(c)\,\mathrm{X}0$ o $f\acute{}(c)$ no existe, entonces el valor de c es un punto crítico de f

Criterio de la primera derivada para extremos relativos

Sea $f(x)$ una función continua en el intervalo abierto $\langle a,b \rangle$. Sea c un punto de $\langle a,b \rangle$. Tenemos lo siguiente

a) Si, $\begin{matrix} f\acute{}(x)\,\Psi 0, & a\,\Phi x\,\Phi c \\ f\acute{}(x)\,\Phi 0, & c\,\Phi x\,\Phi b \end{matrix}$

Entonces $f(c)$ es un valor máximo relativo de la función

b) Si, $\begin{matrix} f\acute{}(x)\,\Phi 0, & a\,\Phi x\,\Phi c \\ f\acute{}(x)\,\Psi 0, & c\,\Phi x\,\Phi b \end{matrix}$

Entonces $f(c)$ es un valor mínimo relativo de la función

Criterio de la segunda derivada para extremos relativos

Si $y\,\mathrm{X}\,f(x)$ es una función, y los puntos en donde la segunda derivada se anulan se denomina puntos de inflexión, es decir en x_0 se tiene un punto de inflexión si $f\acute{}(x_0)\,\mathrm{X}0$.

Si x_1 es punto crítico es decir $f\acute{}(x_1)\,\mathrm{X}0$ o no existe $f\acute{}(x_1)\,\mathrm{X}0$.

Si, $f\acute{}\acute{}(x)\,\Psi 0$, entonces existe mínimo en $x\,\mathrm{X}x_1$

Si, $f\acute{}\acute{}(x)\,\Phi 0$, entonces existe máximo en $x\,\mathrm{X}x_1$

Si, $f\acute{}\acute{}(x)\,\Psi 0, \quad \neg x \quad \langle a,b \rangle$ $f(x)$ es cóncava hacia arriba

Si, $f\acute{}\acute{}(x)\,\Phi 0, \quad \neg x \quad \langle a,b \rangle$ $f(x)$ es cóncava hacia abajo

2.2. PROCESOS DIDÁCTICOS PARA DESARROLLAR LA CAPACIDAD DEMOSTRACIÓN MATEMÁTICA

En toda sesión de cálculo diferencial se busca que el estudiante presente un nivel adecuado en cuanto a su capacidad de demostración matemática, para lo cual el presente estudio, pretende proponer un Modelo didáctico que abarque el proceso didáctico que permita el desarrollo de la capacidad de demostración matemática.

Las siglas del modelo didáctico PIPAB resumen los procesos didácticos que deben ser considerados en una sesión de aprendizaje para desarrollar la capacidad demostración matemática, enmarcando cinco fases que serán mencionadas a continuación:

Fase 1: Problematizar

En esta fase se plantea un problema contextualizado a alguna actividad profesional, económica o social a través de la presentación en diapositiva u otro medio. Este problema debe ser relevante, significativo, ni tan simple que todos lo resuelven inmediatamente, ni tan complejo que nadie pueda entenderlo.

El problema tiene que suscitar la atención, la curiosidad, ser novedoso, atractivo al estudiante, además de planteársele como un reto.

El problema planteado permitirá coflictuar cognitivamente al estudiante (Ausubel, 1983), de tal forma que lo motive extrínsecamente.

Fase 2: Identificar

De manera individual leen los estudiantes el problema planteado por el docente con el objetivo de identificar los términos o conceptos que no entienden, los datos que se presentan en el problema, reconocer la incógnita o lo que se les pide encontrar o averiguar.

Se sugiere al estudiante que lea las veces que sean necesarias para entender el problema, que sistematice la información, lo que le da el problema y lo que le falta.

El estudiante comprobará después si los datos son suficientes para resolver el problema, si hay redundancia en la información o si ella es incompleta.

Fase 3: Probar

El docente a través de la técnica interrogación diálogo planteará interrogantes precisas de aquellos saberes que el estudiante asimiló en clases anteriores y que son relevantes que se aclaren y consoliden para comprender la nueva información.

Los estudiantes evocan a través de sus respuestas sus experiencias o aprendizajes anteriores que permitirá consolidar la nueva información.

Comprobar a través del diálogo el nivel de abstracción de los conceptos, definiciones, reglas, principios anteriormente estudiados.

Seguidamente el docente comunicará los propósitos de aprendizaje de la clase, la competencia, las capacidades a desarrollar y los indicadores e instrumentos con los cuales va a evaluar los aprendizajes de los estudiantes.

Fase 4: Analizar y construir

En esta fase el docente presenta la información a ser aprendida comprensivamente por el estudiante, con la ayuda de software informático de aplicación matemática como Maple, Cabri, Graphmática, etc.

Organiza el aula para el trabajo de análisis de la información, de manera individual o grupal, ya sea para que elaboren resúmenes u organizadores de información o según la actividad que plantee el docente.

Luego de comprender la nueva información, en el que algunos tópicos incluirán teoremas demostrables o resuelven el problema planteado inicialmente.

Fase 5: Buscar y evaluar

Posteriormente el docente busca, selecciona un teorema significativo del cuerpo teórico presentado a los estudiantes, para que mediante su experiencia oriente los procesos de demostración matemática, luego los estudiantes en equipo realizan una demostración matemática en un nivel de complejidad sencilla.

El docente tiene que ser explícito e indicar que pasos o procedimientos se van a evaluar en una demostración, teniendo en cuenta la operacionalización de la variable demostración matemática de la presente tesis.
El docente verifica el proceso que realizan los estudiantes, grupo por grupo, orientándoles en el proceso, nunca indicándoles explícitamente lo que tiene que llevar cabo.
Luego uno o más grupos exponen el proceso de demostración realizada.
El docente mediante una rúbrica verifica y evalúa el nivel de desarrollo de la capacidad de demostración matemática.

Considerando las fases detalladas en la parte superior surge el nombre del Modelo Didáctico PIPAB (Problematizar, Identificar, Probar, Analizar y construir, Buscar y evaluar); realizando la aplicación de manera adecuada permite desarrollar la capacidad de demostración matemática.

La intuición matemática con el apoyo de situaciones prácticas, cotidianas y elementos virtuales permite entender los contenidos matemáticos, como si fueran “verdades que se ven” (Espinoza, 2008). Es por ello que el docente se ayude de recursos tecnológicos como software matemático como ayuda para mejorar los procesos comprensivos de una idea matemática.

Una cuestión básica de la educación matemática es la de interrelacionar la intuición y las nociones matemáticas, de tal forma que vayan emparejadas y una se interrelacionen biunívocamente, que el concepto matemático vaya con la idea intuitiva y viceversa.

El aspecto formal de la demostración matemática es otro aspecto que resalta la propuesta es la importancia que tiene en los procesos demostrativos es la construcción de significante matemáticos: símbolos matemáticos que el estudiante tiene que darle significado en su pensamiento, Es por ello que la teoría formalista es relevante en la presente propuesta.

Según Piaget (citado por Papalia, Wendkos & Duskin, 1998) el nivel más alto del desarrollo cognoscitivo es el de las operaciones formales, iniciándose alrededor de los 12 años, es en este nivel en el que las personas alcanzan la capacidad de pensamiento abstracto, permitiendo a la persona “imaginar posibilidades, demostrar hipótesis y formar teorías” (p. 644).

También se afirma que a medida que el cerebro del adolescente madura y el entorno social es más amplio, el adolescente tiene más oportunidades para la experimentación y el crecimiento cognoscitivo, más todavía cuando los desafíos son mayores. Sin embargo, “las personas que son capaces del pensamiento formal no siempre lo utilizan” (Papalia, Wendkos & Duskin, 1998, p. 646 - 647).

Es por ello que consideramos que los procesos de abstracción matemática se deben llevar a cabo en adolescentes o jóvenes que ya hayan desarrollado la etapa de las operaciones formales (Papalia y otros, 1998).

Considerando que las demostraciones matemáticas son procesos constructivos que se realicen en toda la sesión de aprendizaje de la matemática en las aulas universitarias es un aspecto importante en la formación del estudiante, es por ello que (Ruiz, 1990) afirma que para los intuicionistas los aspectos formales de la matemática no son los más importante, sino los procesos constructivos que se realizan para aprendan los tópicos de la matemática.

Teniendo en cuenta que no se aprende a realizar las demostraciones matemáticas por el solo hecho de realizarlas, sino el proceso de construcción de las definiciones, los teoremas, etc. es lo que permite después desarrolla la capacidad antes mencionada.

CAPÍTULO III

METODOLOGÍA

III. METODOLOGÍA

3.1. Tipo de estudio

Se considera que la presente investigación se enmarca dentro de un enfoque cuantitativo, no experimental y holística: proyectiva. Cuantitativo, ya que considerando lo manifestado por (Valderrama, 2015) en la presente investigación dado que se recopilará información en la aplicación del instrumento, la cuál será medida y procesada para establecer las conclusiones y recomendaciones finales, siendo no experimental, dado que no se manipularán deliberadamente las variables en estudio; asimismo considerando lo expresado por (Hurtado, 2000) la investigación es holística: Proyectiva, debido que el presente estudio propondrá un modelo didáctico al cual denomina PIPAB para desarrollar la capacidad demostración matemática.

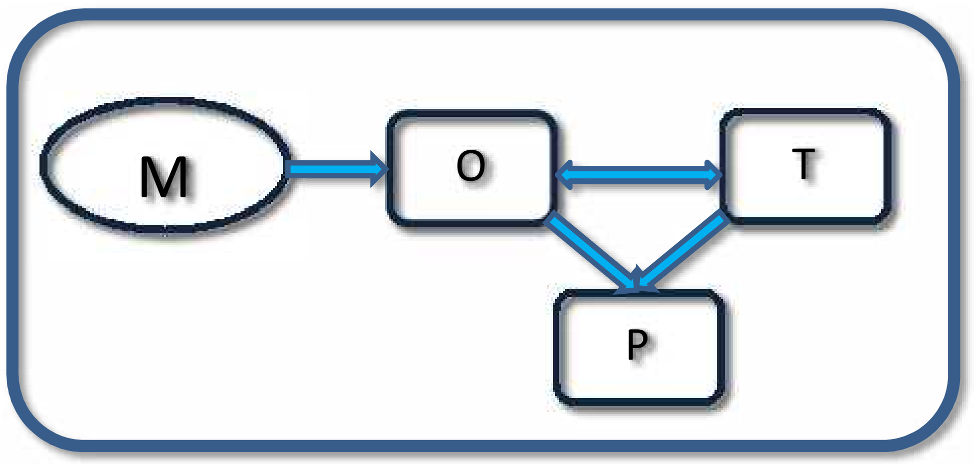
3.2. Diseño de estudio

Considerando también el aporte de Hernández, Fernández & Baptista (2010), el diseño que se empleará es el de investigación transversal descriptivo que consiste en describir los datos recolectados en un solo momento, en un único tiempo sobre una variable determinada (p.151), es decir se recolectará la información referente a la variable demostración matemática sobre un teorema o teoremas referidos a cálculo diferencial, correspondiente al ciclo académico 2016-II.

El desarrollo de la presente investigación se puede expresar en las siguientes fases:

Figura N° 01

Diseño de investigación



Donde:

M = Muestra de estudio: Docentes que enseñan el curso de Cálculo Diferencial y los estudiantes del II ciclo de la Escuela de Matemática de la Universidad Nacional “Pedro Ruiz Gallo”.

O = Observación y análisis de la capacidad demostración matemática en la muestra de estudio.

T = Estudio teórico: Análisis de investigaciones relacionadas con la demostración matemática y con su enseñanza - aprendizaje. Asimismo, se analizaron teorías de la demostración matemática en cálculo diferencial.

P = Diseño, elaboración y validación de la propuesta: Modelo didáctico PIPAB para desarrollar la capacidad de demostración matemática de los estudiantes universitarios en Cálculo Diferencial.

3.3. Variables

Variable Independiente: Modelo didáctico PIPAB para las demostraciones matemáticas en cálculo diferencial.

Variable Dependiente: Capacidad demostración matemática.

3.3.1. Definición conceptual

Modelo didáctico para las demostraciones matemáticas en Cálculo Diferencial.

Es una construcción teórico formal que basada en supuestos científicos e ideológicos pretende interpretar la realidad escolar y dirigir hacia determinados fines educativos.
Es una representación simbólica conceptual de la realidad educativa, que tiene por objetivo funcionar como esquema mediador entre la realidad educativa y el pensamiento. Sirve como estructura en torno a la cual se organiza el conocimiento. (Ortiz, 2012, p.20)

Capacidad de demostración matemática:

Es un razonamiento o proceso de deducción lógica que partiendo de una hipótesis nos permite llegar a una tesis o conclusión. (Gonzales, 2010)

3.3.2. Definición operacional

Modelo didáctico PIPAB para las demostraciones matemáticas en Cálculo Diferencial.

Es una propuesta de cómo el docente puede ayudar a los estudiantes en el desarrollo de la capacidad de demostración matemática en Cálculo Diferencial, lo cual incluye el desarrollo de la capacidad, actitud favorable a las demostraciones y el conocimiento para realizarlas. Está sustentado en teorías de otros investigadores, en el análisis de los resultados de la evaluación realizada a los estudiantes y en la opinión de docentes que desarrollan esta asignatura, así como en la opinión de los estudiantes de últimos ciclos que han cursado esta asignatura.

Capacidad de demostración matemática

Conjunto de procedimientos que realiza el estudiante para que a partir de una hipótesis logre demostrar una tesis.

El desarrollo de las demostraciones matemáticas será evaluado teniendo en cuenta los siguientes indicadores:

- Identifica la hipótesis (H) y la tesis (T)

- Elección adecuada de los axiomas, propiedades o teoremas demostrados
- Justificaciones.
- Obtención de la conclusión
- Relaciona la hipótesis con la tesis al final de la demostración matemática.

3.4. Operacionalización de variables

Tabla N° 02

Las variables de estudio y su operacionalización

Elaboración propia.

3.5. Población

Está conformada por 04 docentes que han enseñado el curso de Cálculo Diferencial y los 20 estudiantes de Matemática de la U.N.P.R.G. que cursan la asignatura de Cálculo Diferencial, los cuales son estudiantes egresados por lo general de instituciones educativas estatales, provenientes en su mayoría de los diferentes distritos de Lambayeque, de Chiclayo y de Ferreñafe, sus edades fluctúan entre 18 y 20 años.

Según Hernández, R., Fernández, C. & Baptista, P. (2010), el muestreo es probabilístico bajo la modalidad aleatoria; asimismo por el pequeño tamaño que presenta la población es que se ha considerado igual a la muestra es decir que la muestra está conformada por los 04 docentes que han enseñado el curso Cálculo Diferencial y los 20 estudiantes de Matemática de la U.N.P.R.G. que cursan la asignatura de Cálculo Diferencial

3.6. Método de investigación

Se utilizó el método inductivo, dado que la investigación inició de un caso particular que son las demostraciones de propiedades del cálculo diferencial, realizadas por los estudiantes de Matemática de la U.N.P.R.G.

También se empleó el método analítico, debido a que se describe el desarrollo de la demostración matemática en cálculo diferencial, teniendo en

VARIABLE	Definición operacional	Categorías	Indicador	Escala
INDEPENDIENTE Modelo didáctico PIPAB	Es una propuesta de cómo el docente puede ayudar a los estudiantes en el desarrollo de la capacidad de demostración matemática en Cálculo Diferencial, desde la teoría de Piaget y la abstracción matemática	Problematizar	Análisis individual de un problema contextualizado relacionado con los teoremas a demostrar.	1-54: Inaplicable 55-65: Levantar observaciones 66-85: El modelo es aplicable con mejoras 86-100 Aplicable
		Identificar	Determinación de los conceptos y datos conocidos y desconocidos en el problema.	
		Probar	Comprobación de aprendizajes anteriores que ayudarán a comprender y posteriormente resolver el problema.	
		Analizar y construir.	Análisis comprensivo de los nuevos contenidos que permitirán resolver el problema y posteriormente realizar demostraciones matemáticas.	
		Buscar y evaluar	Búsqueda y selección de teoremas importantes que requieren demostración matemática Aplicación de estrategias auto, co y heteroevaluativas, de proceso y sumativa.	
DEPENDIENTE Capacidad de demostración matemática	Conjunto de procedimientos que realiza el estudiante para que a partir de una hipótesis logre demostrar una tesis.	Identificación de la hipótesis (IH)	Identifica y escribe la hipótesis.	00-10: Nivel inicio 11-15: Nivel intermedio. 16-20: Nivel superior
		Identificación de la tesis (IT)	Identifica y escribe la tesis.	
		Planteamiento (Pl)	Identifica y elige pertinentemente la definición o el concepto matemático.	
		Procedimiento (Pr)	Justifica los pasos mediante la propiedad, el axioma u otro teorema elegido para la demostración.	
		Obtención de la conclusión (C)	A partir de la hipótesis obtiene deductivamente la conclusión, la escribe a través de una oración.	

cuenta diferentes aspectos como los mencionados en los indicadores de la variable.

Así mismo se empleó el método sintético que permitió relacionar los aportes teóricos para la propuesta del modelo didáctico unificando procesos y principios.

Finalmente se utilizó el método propositivo, el cual permitirá diseñar un modelo didáctico para mejorar el desarrollo de la demostración matemática, a partir de dichos resultados y de la revisión de las teorías sobre la demostración matemática denominado modelo PIPAB.

3.7. Técnicas e instrumentos de recolección de datos

Las técnicas que se emplearon fueron la aplicación de la entrevista y la evaluación.

La técnica de entrevista permitió aplicar un cuestionario a los docentes que han enseñado el curso de cálculo diferencial en la carrera de matemática de la U.N.P.R.G., lo que dio a conocer la realidad local en relación a la demostración matemática realizada por los estudiantes.

La técnica de evaluación permitió aplicar un test de evaluación a los estudiantes que cursan la asignatura de Cálculo Diferencial en la carrera de matemática de la U.N.P.R.G, con la finalidad de conocer su opinión respecto a las demostraciones matemáticas y su desenvolvimiento en este aspecto.

Asimismo la técnica de la evaluación permitió evaluar el desarrollo de la capacidad demostración matemática en los estudiantes de II ciclo de la carrera de matemática de la U.N.P.R.G. en Cálculo diferencial en base a los indicadores de la variable, a través de la aplicación de su instrumento, que es el Test de Evaluación, el cuál fue sometido a juicio de expertos y a la prueba estadística Coeficiente de Alfa de Cronbach con la finalidad de establecer su validez y confiabilidad, para posteriormente ser aplicado a la muestra de estudio.

Para la sistematización del marco teórico se aplicó la técnica del fichaje tanto de artículos científicos como de libros, físicos y virtuales.

3.8. Métodos de análisis de datos

Se aplicó el coeficiente de Alfa de Cronbach para determinar la fiabilidad del instrumento; asimismo, la información que se recopiló fue organizada y procesada en IBM® SPSS Statistics® versión 22 para su posterior presentación en tablas y figuras estadísticas, siendo descritas en función de los objetivos e indicadores de las variables de investigación.

CAPÍTULO IV

PROPUESTA, PRESENTACIÓN, DISCUSIÓN DE RESULTADOS

IV. RESULTADOS

4.1. Presentación de resultados

4.1.1. Presentación de resultados de la entrevista aplicada a docentes

Considerando la aplicación del instrumento aplicado a cuatro (04) docentes que tienen a cargo asignaturas de Matemática de la Universidad "Nacional Pedro Ruiz Gallo" se observa que sus puntos de vista respecto a los temas o cuestiones a los que fueron consultados, es como sigue:

1. ¿Qué piensa sobre la capacidad demostrativa en los estudiantes de Matemática?

El 75% de los entrevistados afirman contundentemente que se tiene que trabajar desde los primeros ciclos el desarrollo de la capacidad de la demostración matemática en los estudiantes de esta especialidad, ya que esta habilidad les permitirá formarse correctamente como futuros profesionales de la ciencia matemática. Consideran a priori que el nivel de desarrollo de esta capacidad aún no es la mejor que ellos quisieran.

2. ¿Por qué cree que es importante el desarrollo de esta capacidad en los estudiantes de Matemática?

Todos los docentes entrevistados afirman de uno u otro modo que es muy importante desarrollar esta capacidad de demostración matemática porque con ella se desarrollan otras habilidades como el orden, la perseverancia, la dedicación que son habilidades socio-personales, mientras que cognitivamente se desarrollan habilidades como el análisis, la síntesis y en general la capacidad de abstracción.

3. ¿Cómo ve a sus estudiantes con respecto al desarrollo de esta capacidad?

Dos de cuatro docentes afirman que la mayoría de sus estudiantes están en proceso de desarrollo de la capacidad de demostración matemática, mientras que los otros dos docentes afirman que sus estudiantes tienen un nivel entre regular y aceptable.

4. ¿Conoce algún trabajo de investigación que haya evaluado la capacidad de demostración matemática en los estudiantes de Matemática de la UNPRG o en otro lugar?

Todos los docentes afirmaron que no conocían de trabajos de investigación que se hayan hecho para evaluar la capacidad de demostración matemática en la UNPRG.
Afirmaron que sí conocían de trabajos de investigación realizados en Colombia o Venezuela.

5. ¿Cree que los estudiantes de Matemática deben ser evaluados en la capacidad demostración matemática? ¿Por qué?

Consideran en su totalidad que parte de la formación de los estudiante de Matemática debe ser el desarrollo de la capacidad de demostración matemática, en los docentes deben lograr desarrollar al máximo nivel posible esta capacidad en los jóvenes estudiantes.

4.1.2. Presentación de resultados del test aplicado a estudiantes

A continuación se presentan las calificaciones de los estudiantes que participaron de la evaluación diagnóstica, los cuales fueron estudiantes del II ciclo de la Escuela de Matemática de la Universidad Nacional Pedro Ruiz Gallo.

Los resultados son los siguientes:

Tabla N°03

N°	APELLIDOS	ÍTEM 1						´TEM 2						ÍTEM 3						ÍTEM 4						NOTA
		IH	IT	Pl	Pr	C	Pu	IH	IT	Pl	Pr	C	Pu	IH	IT	Pl	Pr	C	Pu	IH	IT	Pl	Pr	C	Pu	
1	Agapito	1	1	0	0	0	**02**	1	1	0	0	0	**02**	1	1	1	0	0	**03**	0	0	0	0	0	**0**	08
2	Alburqueque	0,5	0,5	1	0	0	**02**	0	0	0	0	0	**00**	1	0	0	0	0	**01**	0	0	0	0	0	**0**	03
3	Álvarez	1	1	0	0	0	**02**	1	1	0	0	0	**02**	1	1	1	0	0	**03**	1	0	0	0	0	**01**	08
4	Baldera	1	1	1	0	0	**03**	1	1	0	0	0	**02**	1	1	1	0	0	**03**	1	0	0	0	0	**01**	09
5	Cubas	1	1	1	0	0	**03**	1	1	0	0	0	**02**	1	1	0	0	0	**02**	1	0	0	0	0	**01**	08
6	Díaz	0	0	0	0	0	**00**	0	1	0	0	0	**01**	1	1	1	0	0	**03**	0	0	0	0	0	**0**	04
7	Fernández	0	0	0	0	0	**00**	1	1	0	0	0	**02**	1	0	0	0	0	**01**	0	0	0	0	0	**0**	03
8	Gil	1	1	1	0	0	**03**	1	1	1	0	0	**03**	1	1	1	1	0	**04**	0,5	0,5	0	0	0	**01**	11
9	Huaripata	1	0	0	0	0	**01**	1	1	0	0	0	**02**	1	1	1	0	0	**03**	0	0	0	0	0	**0**	06
10	Juape	1	0	0	0	0	**01**	0,5	0,5	0	0	0	**01**	1	1	0	0	0	**02**	0	0	0	0	0	**0**	04
11	Manayay	0,5	0,5	1	0	0	**02**	1	1	0	0	0	**02**	1	1	0	0	0	**02**	1	0	0	0	0	**01**	07
12	Mayanga	0	0	0	0	0	**00**	1	0	0	0	0	**01**	1	1	0	0	0	**02**	0	0	0	0	0	**0**	03
13	Moreto	1	1	1	0	0	**03**	1	1	0	0	0	**02**	1	1	0	0	0	**02**	0	0	0	0	0	**0**	07
14	Neciosup	1	1	0	0	0	**02**	1	1	0	0	0	**02**	1	1	1	0	0	**03**	0	0	0	0	0	**0**	07
15	Peche	0,5	0,5	1	0	0	**02**	1	1	0	0	0	**02**	1	1	0	0	0	**02**	1	0	0	0	0	**01**	07
16	Requejo	1	1	0	0	0	**02**	1	1	0	0	0	**02**	1	1	0	0	0	**02**	0	0	0	0	0	**0**	06
17	Santisteban	0,5	0,5	1	0	0	**02**	1	1	0	0	0	**02**	1	1	0	0	0	**02**	0	0	0	0	0	**0**	06
18	Suclupe	0	0	0	0	0	**00**	1	1	0	0	0	**02**	1	1	0	0	0	**02**	0	0	0	0	0	**0**	04
19	Torres	1	1	1	0	0	**03**	1	1	0	0	0	**02**	1	1	0	0	0	**02**	0	0	0	0	0	**0**	07
20	Vásquez	1	0	0	0	0	**01**	1	1	0	0	0	**02**	1	1	0	0	0	**02**	0	0	0	0	0	**0**	05

Donde IH: identifica y escribe de la hipótesis, IT: identifica y escribe de la tesis, Pl: justifica y elige pertinentemente la definición, Pr: realiza y justifica los pasos de dem., C: conclusión.

Tabla N° 04
Frecuencias de las calificaciones de estudiantes de la muestra en demostración matemática.

Puntaje

		Frequency	Percent	Valid Percent	Cumulative Percent
Valid	3	3	15,0	15,0	15,0
	4	3	15,0	15,0	30,0
	5	1	5,0	5,0	35,0
	6	3	15,0	15,0	50,0
	7	5	25,0	25,0	75,0
	8	3	15,0	15,0	90,0
	9	1	5,0	5,0	95,0
	11	1	5,0	5,0	100,0
	Total	20	100,0	100,0	

N = 20 estudiantes que estudian Cálculo Diferencial de la UNPRG.

Se observa que como consecuencia de la aplicación del TEST DE EVALUACIÓN DE LA CAPACIDAD DEMOSTRACIÓN MATEMÁTICA a los 20 estudiantes, 17 varones y 3 mujeres, se observa que el 95% de los evaluados obtuvieron calificaciones iguales o menores que 09 (nueve) de un total de 20 (veinte) posibles, ver Figura N° 02.

Como consecuencia de estos resultados se puede afirmar que el 95% de los estudiantes de la muestra de estudio que fueron evaluados mediante este test, que fue validado por docentes expertos en el área de matemática, se ubican en un nivel de inicio.

En la solución del primer ítem se observa objetivamente que solo 12 de 20 estudiantes redactaron correctamente la hipótesis, solo 9 de 20 redactaron bien la tesis, solo que 9 de 20 eligen pertinentemente la definición o concepto para iniciar los pasos de demostración matemática y los dos últimos pasos que son la realización y justificación de los pasos y la obtención de la conclusión ningún estudiante llega a realizarlo. Téngase en cuenta que la realización de los pasos de demostración y su respectiva justificación son el elemento fundamental de la demostración matemática, es aquí donde ellos enuncian las deducciones progresivamente como consecuencia de la aplicación de las propiedades, definiciones, anteriores teoremas del tema en demostración.

En la solución del segundo ítem se observa que se incrementa el número de estudiantes que redactan correctamente la hipótesis, los cuales son 17 de 20; además 17 de 20 redactaron bien la tesis, mientras que solo 1 de 20 elige correctamente la definición o concepto matemático; además el 100% de los estudiantes no realizan los pasos de demostración y su respectiva justificación ni la conclusión.

En la solución del tercer ítem y cuarto ítem ocurre algo similar al segundo y primero en el que los estudiante en su mayoría (19 de 20) no logran llevar a cabo los pasos de demostración matemática.

Tabla N°05

Frecuencias de las calificaciones de 20 estudiantes obtenidos en el test de demostración matemática.

Descriptive Statistics

	N	Range	Minimum	Maximum	Sum	Mean	Std. Deviation	Variance
puntaje	20	8	3	11	123	**6,15**	2,183	4,766
Valid N (listwise)	20							

Se observa que como consecuencia de la obtención de las calificaciones individuales se obtiene que la nota mínima es 03 (tres) y la máxima es 11(once), donde se debe resaltar que solo un estudiante obtuvo esta última calificación; además se observa que el grupo estudio obtiene un promedio de 6,15 que matemáticamente se redondea a 06 (seis), lo que se puede afirmar que en promedio los estudiantes de la muestra se ubican en un nivel de inicio.

Figura N° 02

Calificaciones de estudiantes de la muestra en demostración matemática.

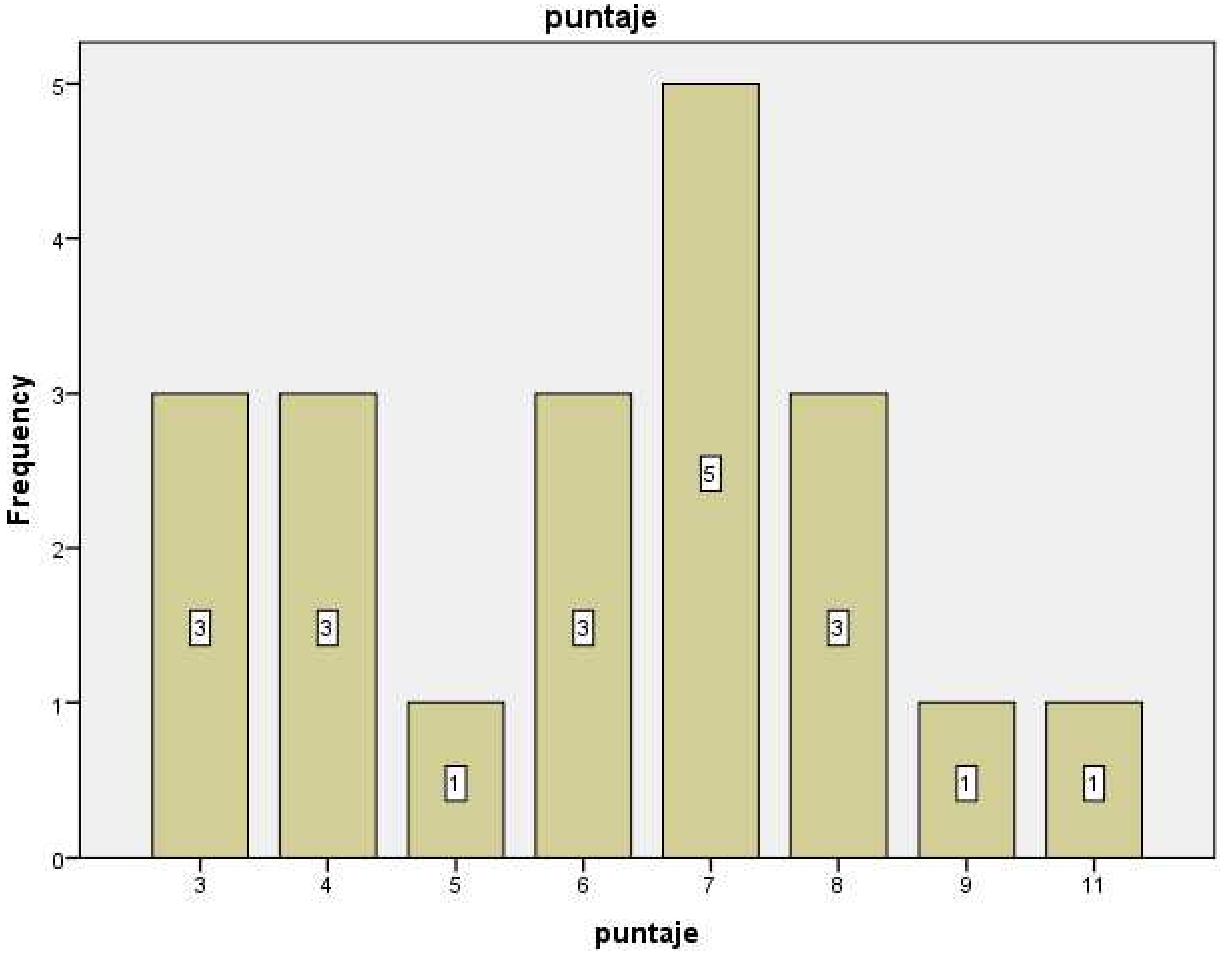


Tabla N° 06

Alfa de Cronbach para determinar la fiabilidad del test aplicado a los estudiantes de la muestra

Alfa de Cronbach

Reliability Statistics

Cronbach's Alpha	N of Items
,715	20

Se observa que el valor de este índice de consistencia interna es de 0,75 lo que significa que el instrumento tiene una buena consistencia interna, lo que quiere decir que cumple con el propósito de medición de la capacidad de demostración matemática en estudiantes universitarios.

4.1.3. Resultados del Modelo PIPAB

PROPUESTA DE MODELO PIPAB

1. DENOMINACIÓN DEL MODELO

MODELO DIDÁCTICO PIPAB PARA DESARROLLAR LA CAPACIDAD DEMOSTRACIÓN MATEMÁTICA DE LOS ESTUDIANTES UNIVERSITARIOS EN EL CÁLCULO DIFERENCIAL EN UNA UNIVERSIDAD DE LAMBAYEQUE, 2016.

2. INTRODUCCIÓN

Los problemas de aprendizaje de la Matemática no solo se observan en nuestro país o en alguno de los niveles Educativos de nuestro sistema educativo peruano.

En Educación Superior, uno de los problemas del aprendizaje de la Matemática, además de la resolución de problemas de aplicación, son las demostraciones matemáticas.

Una de las razones para no comprender las demostraciones matemáticas ha sido la desvinculación de la ciencia matemática a cuestiones prácticas de la vida cotidiana o de la carrera a la cual se forma un estudiante de educación superior universitaria.

Se evidencia que en los últimos años pocos estudiantes deciden seguir una carrera vinculada a las matemáticas. Pilot & Osborne (citados por Ruiz, s.f).

Llevar a cabo una demostración matemática no es un acto repetitivo de pasos, es comunicar, compartir, orientar ideas matemáticas a otro u otros que entienden el lenguaje matemático, (Solow, 1993). Este mismo autor manifiesta:

> La incapacidad para comunicar demostraciones de una manera comprensible ha sido perjudicial para estudiantes y profesores en todas las ramas de las matemáticas. Todos aquellos que han tenido la experiencia de enseñar matemáticas y la mayoría de aquellos estudiantes que han tratado de aprenderlas, deben coincidir seguramente en que entender una demostración matemática es una traba para la mayoría de los estudiantes. Muchos de ellos tratan de

> salvar este obstáculo evadiéndolo, confiando en la indulgencia del profesor para que no incluya demostraciones en los exámenes (p. 7).

En nuestro medio, en los claustros universitarios es un problema álgido que se evidencia en los bajos resultados obtenidos en el test aplicado por el suscrito y por los comentarios realizados por los docentes encuestados.

3. OBJETIVO

Proponer un modelo de demostración matemática que permita mejorar esta capacidad en la asignatura de Cálculo Diferencial, a partir del diagnóstico realizado y las teorías actuales de demostración matemática.

4. JUSTIFICACIÓN

En la enseñanza y el aprendizaje de la demostración más que proceso de verificación debe considerarse un proceso de descubrimiento del concepto matemático a comprender y posteriormente aprender la ejecución autónoma de demostraciones matemáticas.

El modelo PIPAB se justifica por que plantea un conjunto ordenado sistemático, didáctico, apropiado para el aprendizaje de la demostración matemática, por parte de estudiantes de Matemática de Educación Superior Universitario.

El modelo PIPAB con sus fases: Problematizar, identificar, probar, analizar - construir y buscar - evaluar, permite al docente universitario que tiene a cargo cursos o asignaturas afines al Cálculo Diferencial orientar eficientemente el proceso de aprendizaje de las matemáticas en general y fundamentalmente el aprendizaje de las demostraciones matemáticas en particular.

El modelo PIPAB permite incrementar el cuerpo de conocimientos teórico referido al campo de la innovación y la didáctica de la Matemática en Educación Superior, ya que teniendo en cuenta sus procesos didácticos contribuirá a incrementar el conocimiento científico.

5. DESCRIPCIÓN DEL MODELO

El modelo didáctico de demostración matemática PIPAB consta de pasos didácticos muy específicos para orientar el aprendizaje, de manera objetiva y efectiva, no solo de la demostración matemática, sino de aquellos procesos de enseñanza aprendizaje que además de orientar procesos de aprendizaje de contenidos y estrategias matemáticas, permita desarrollar la capacidad de demostración matemática.

El presente Modelo no se centra – como sostengo – solamente en el proceso mismo de la demostración matemática y sus pasos, sino va más allá, se enfoca en un proceso mucho más abarcador y complejo que el proceso de enseñanza aprendizaje de aquellos contenidos matemáticos, que además de servir para ampliar el saber científico matemático, permita resolver problemas de las diferentes disciplinas y fundamentalmente ayude a desarrollar la capacidad de demostración matemática.

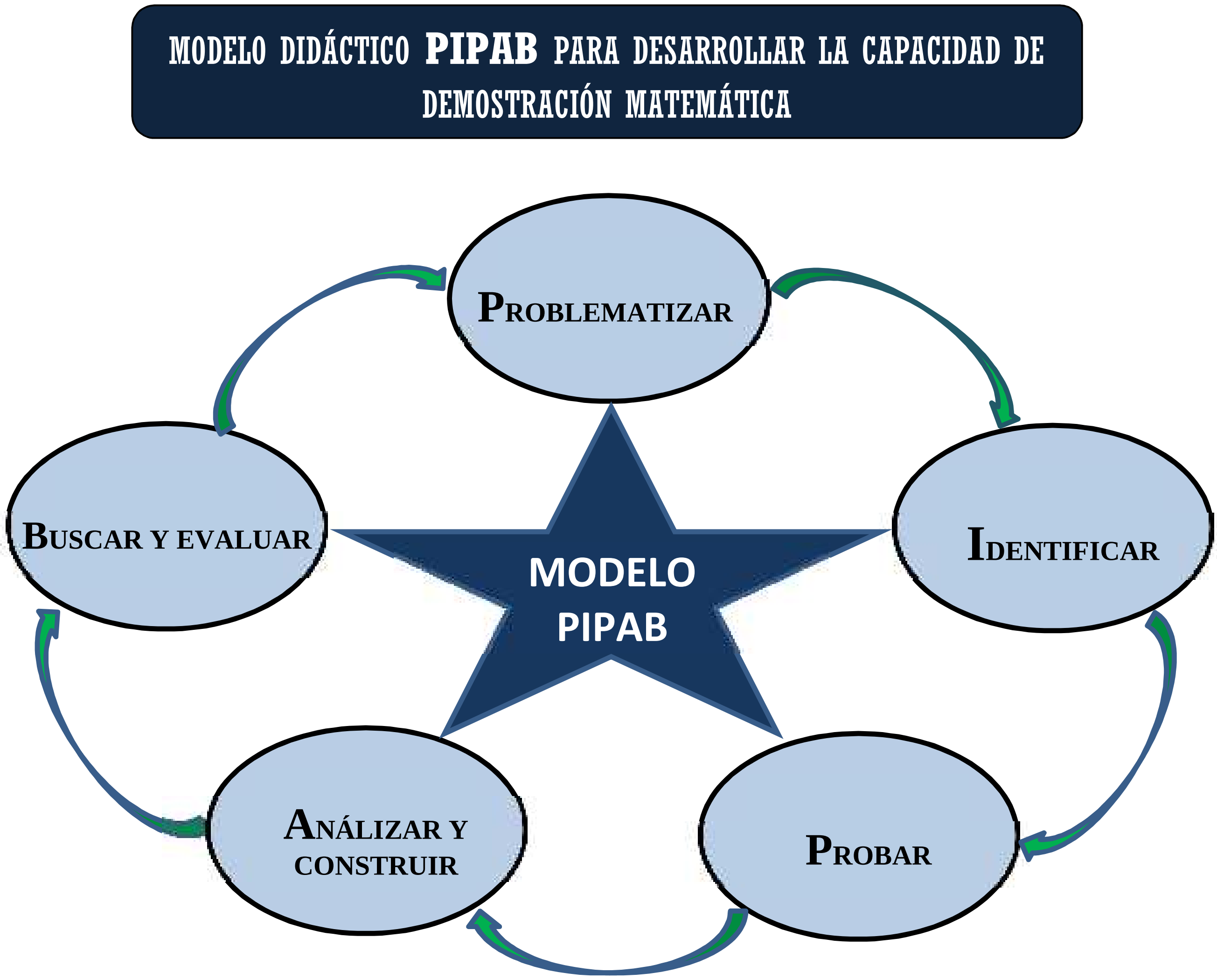
Los estudiantes de Matemática en Educación Superior tienen que desarrollar su pensamiento abstracto (Piaget), ya sea para comprender los contenidos matemáticos o para realizar demostraciones, pero se tiene que buscar mecanismos o estrategias que permitan al estudiante entender que la matemática se relaciona continua y permanentemente con su realidad o su entorno, para que de este modo le encuentren sentido a lo que están aprendiendo y desarrollen una motivación intrínseca que posibilite el aprender a aprender a lo largo de su vida.

Ya en el siglo pasado Solow (1993) lo anticipaba y afirmaba que para que se utilicen eficazmente las matemáticas, sus métodos deben entenderse adecuadamente, de otra manera estaremos en el papel de robots. Es por ello que el aprendizaje de las matemáticas no deben ser tareas que roboticen a los estudiantes con procesos mecanicistas que lo único que se logra es el fracaso en el desarrollo de la habilidad de demostración matemática.

La demostración matemática debe entenderse como un “método formal” que permite demostrar que “si A verdadero, entonces B es verdadero”, lo cual es equivalente “A implica a B”. (Solow, 1993, p. 21). El mismo autor afirma que una demostración matemática es “un argumento convincente expresado en el idioma de las matemáticas (…).

6. ESQUEMA DEL MODELO

Figura N° 03
Esquema de Modelo PIPAB.



Elaboración propia.

A continuación se detalla cada una de las fases del modelo didáctico PIPAB:

1. Problematizar

En esta fase se plantea un problema contextualizado a alguna actividad profesional, económica o social a través de la presentación en diapositiva u otro medio. Este problema debe ser relevante, significativo, ni tan simple que todos lo resuelven inmediatamente, ni tan complejo que nadie pueda entenderlo.

El problema tiene que suscitar la atención, la curiosidad, ser novedoso, atractivo al estudiante, además de planteársele como un reto.

El problema planteado permitirá coflictuar cognitivamente al estudiante (Ausubel, 1983), de tal forma que lo motive extrínsecamente.

2. Identificar

De manera individual leen los estudiantes el problema planteado por el docente con el objetivo de identificar los términos o conceptos que no entienden, los datos que se presentan en el problema, reconocer la incógnita o lo que se les pide encontrar o averiguar.

Se sugiere al estudiante que lea las veces que sean necesarias para entender el problema, que sistematice la información, lo que le da el problema y lo que le falta.

El estudiante comprobará después si los datos son suficientes para resolver el problema, si hay redundancia en la información o si ella es incompleta.

3. Probar

El docente a través de la técnica interrogación diálogo planteará interrogantes precisas de aquellos saberes que el estudiante asimiló en clases anteriores y que son relevantes que se aclaren y consoliden para comprender la nueva información.

Los estudiantes evocan a través de sus respuestas sus experiencias o aprendizajes anteriores que permitirá consolidar la nueva información.

Comprobar a través del diálogo el nivel de abstracción de los conceptos, definiciones, reglas, principios anteriormente estudiados.

Seguidamente el docente comunicará los propósitos de aprendizaje de la clase, la competencia, las capacidades a desarrollar y los indicadores e instrumentos con los cuales va a evaluar los aprendizajes de los estudiantes.

4. Analizar y construir

En esta fase el docente presenta la información a ser aprendida comprensivamente por el estudiante, con la ayuda de software informáticos de aplicación matemática como Maple, Cabri, Graphmática, etc.

Organiza el aula para el trabajo de análisis de la información, de manera individual o grupal, ya sea para que elaboren resúmenes u organizadores de información o según la actividad que plantee el docente.

Luego de comprender la nueva información, en el que algunos tópicos incluirán teoremas demostrables o resuelven el problema planteado inicialmente.

5. Buscar y evaluar

Posteriormente el docente busca, selecciona un teorema significativo del cuerpo teórico presentado a los estudiantes, para que mediante su experiencia oriente los procesos de demostración matemática, luego los estudiantes en equipo realizan una demostración matemática en un nivel de complejidad sencilla.

El docente tiene que ser explícito e indicar que pasos o procedimientos se van a evaluar en una demostración, teniendo en cuenta la operacionalización de la variable demostración matemática de la presente tesis.

El docente verifica el proceso que realizan los estudiantes, grupo por grupo, orientándoles en el proceso, nunca indicándoles explícitamente lo que tiene que llevar cabo.

Luego uno o más grupos exponen el proceso de demostración realizada.

El docente mediante una rúbrica verifica y evalúa el nivel de desarrollo de la capacidad de demostración matemática.

4.2. DISCUSIÓN DE RESULTADOS

A continuación se hará la discusión de los resultados en relación a los objetivos específicos planteados en el acápite 1.6.2

4.2.1. DISCUSIÓN DE LOS RESULTADOS DE LAS OPINIONES DE LOS DOCENTES Y LA CAPACIDAD DEMOSTRACIÓN MATEMÁTICA DE LOS ESTUDIANTES

Según los resultados obtenidos en la aplicación de la entrevista a los docentes a cargo de las asignaturas de Matemática y los resultados del test aplicado a los estudiantes del segundo ciclo se puede afirmar que por un lado el 75% de los docentes opinan que se tiene que trabajar desde los primeros ciclos el desarrollo de la capacidad de la demostración matemática en los estudiantes de esta especialidad, ya que esta habilidad les permitirá formarse correctamente como futuros profesionales de la ciencia matemática, que ésta desarrolla el orden, la perseverancia, la dedicación, que son habilidades socio-personales, mientras que cognitivamente se desarrollan habilidades como el análisis, la síntesis y en general la capacidad de abstracción; pero contradictoriamente analizando los resultados del test aplicado existe un 95% de estudiantes que se ubican en un nivel de inicio; quiere decir que a pesar que afirman y reafirman que el desarrollo de esta capacidad es necesaria e importante los resultados de la evaluación no son alentadores, ya que ésta ha sido aplicada en el último mes del ciclo académico, en el que esta capacidad de demostración matemática de teoremas relacionados con el Cálculo Diferencial ya debió estar desarrollada en un nivel medio a superior.

Podemos decir entonces que los niveles de demostración matemática en dichos estudiantes requieren especial atención por parte de los docentes en mejorar los procesos de aprendizaje de las demostraciones matemática y que los estudiantes comprendan lo que (Gonzáles, 2010) afirma “una demostración matemática es un razonamiento o proceso de deducción lógica que partiendo de una hipótesis nos permite llegar a una tesis o conclusión”.

4.2.2. DISCUSIÓN DE LOS RESULTADOS DEL DISEÑO DEL MODELO PIPAB PARA DESARROLLAR LA CAPACIDAD DEMOSTRACIÓN MATEMÁTICA DE ESTUDIANTES UNIVERSITARIOS

Se debe tener en consideración que se ha definido a un modelo didáctico como “una representación simbólica conceptual de la realidad educativa, que tiene por objetivo funcionar como esquema mediador entre la realidad educativa y el pensamiento. Sirve como estructura en torno a la cual se organiza el conocimiento” (Ortiz, 2012, p.20).

La presente propuesta está basada en las teorías de la abstracción matemática y el desarrollo psicogenético de Jean Piaget.

Lo fundamental del planteamiento además de los procesos es que no puede haber aprendizaje comprensivo de las demostraciones matemáticas sino se realiza un proceso constructivo de los contenidos de aprendizaje, no es solo aprender y recordar los axiomas, postulados, definiciones, propiedades o teoremas para ser experto en las demostraciones matemáticas. Lo que afirmo también es que no es suficiente la repetición en la ejercitación de las demostraciones para lograr un alto desempeño en esta capacidad.

Las siglas del modelo didáctico PIPAB resumen los procesos didácticos que planteo que se deben dar en una sesión de aprendizaje para desarrollar la capacidad demostración matemática.

La intuición matemática con el apoyo de situaciones prácticas, cotidianas y elementos virtuales permite entender los contenidos matemáticos, como si fueran “verdades que se ven” (Espinoza, 2008). Es por ello que el docente se ayude de recursos tecnológicos como software matemático como ayuda para mejorar los procesos comprensivos de una idea matemática.

Se afirma en esta propuesta que un análisis intuitivo respecto de un ente o fenómeno matemático nos puede aportar diferentes sensaciones, como las sensaciones de evidencia y certeza. Estas sensaciones nos hacen sentir seguros de nuestras conclusiones o resultados, sin sentir la necesidad de una rigurosa demostración.

Una cuestión básica de la educación matemática es la de interrelacionar la intuición y las nociones matemáticas, de tal forma que vayan emparejadas y una se interrelacionen biunívocamente, que el concepto matemático vaya con la idea intuitiva y viceversa.

El aspecto formal de la demostración matemática es otro aspecto que resalta la propuesta es la importancia que tiene en los procesos demostrativos es la construcción de significante matemáticos: símbolos matemáticos que el estudiante tiene que darle significado en su pensamiento, Es por ello que la teoría formalista es relevante en la presente propuesta.

Según Piaget (citado por Papalia, Wendkos & Duskin, 1998) el nivel más alto del desarrollo cognoscitivo es el de las operaciones formales, iniciándose alrededor de los 12 años, es en este nivel en el que las personas alcanzan la capacidad de pensamiento abstracto, permitiendo a la persona "imaginar posibilidades, demostrar hipótesis y formar teorías" (p. 644).

También se afirma que a medida que el cerebro del adolescente madura y el entorno social es más amplio, el adolescente tiene más oportunidades para la experimentación y el crecimiento cognoscitivo, más todavía cuando los desafíos son mayores. Sin embargo, "las personas que son capaces del pensamiento formal no siempre lo utilizan" (Papalia, Wendkos & Duskin, 1998, p. 646 - 647).

Es por ello que consideramos que los procesos de abstracción matemática se deben llevar a cabo en adolescentes o jóvenes que ya hayan desarrollado la etapa de las operaciones formales (Papalia, Wendkos & Duskin, 1998).

Considerando que las demostraciones matemáticas son procesos constructivos que se realicen en toda la sesión de aprendizaje de la matemática en las aulas universitarias es un aspecto importante en la formación del estudiante, es por ello que (Ruiz, 1990) afirma que para los intuicionistas los aspectos formales de la matemática no son los más importante, sino los procesos constructivos que se realizan para aprendan los tópicos de la matemática.

Teniendo en cuenta que no se aprende a realizar las demostraciones matemáticas por el solo hecho de realizarlas, sino el proceso de construcción de las definiciones, los teoremas, etc. es lo que permite después desarrolla la capacidad antes mencionada.

Atendiendo a esta necesidad de mejorar la capacidad de demostración matemática en los estudiantes universitarios y la teoría analizada se plantea el Modelo didáctico PIPAB que consta de cinco fases didácticas significativas, secuenciales, las cuales serán detalladas a continuación:

Fase 1: Problematizar

En esta fase se plantea un problema contextualizado a alguna actividad profesional, económica o social a través de la presentación en diapositiva u otro medio. Este problema debe ser relevante, significativo, ni tan simple que todos lo resuelven inmediatamente, ni tan complejo que nadie pueda entenderlo.

El problema tiene que suscitar la atención, la curiosidad, ser novedoso, atractivo al estudiante, además de planteársele como un reto.

El problema planteado permitirá evaluar cognitivamente al estudiante (Ausubel, 1983), de tal forma que lo motive extrínsecamente.

Fase 2: Identificar

De manera individual leen los estudiantes el problema planteado por el docente con el objetivo de identificar los términos o conceptos que no entienden, los datos que se presentan en el problema, reconocer la incógnita o lo que se les pide encontrar o averiguar.

Se sugiere al estudiante que lea las veces que sean necesarias para entender el problema, que sistematice la información, lo que le da el problema y lo que le falta.

El estudiante comprobará después si los datos son suficientes para resolver el problema, si hay redundancia en la información o si ella es incompleta.

Fase 3: Probar

El docente a través de la técnica interrogación diálogo planteará interrogantes precisas de aquellos saberes que el estudiante asimiló en clases anteriores y que son relevantes que se aclaren y consoliden para comprender la nueva información.

Los estudiantes evocan a través de sus respuestas sus experiencias o aprendizajes anteriores que permitirá consolidar la nueva información.

Comprobar a través del diálogo el nivel de abstracción de los conceptos, definiciones, reglas, principios anteriormente estudiados.

Seguidamente el docente comunicará los propósitos de aprendizaje de la clase, la competencia, las capacidades a desarrollar y los indicadores e instrumentos con los cuales va a evaluar los aprendizajes de los estudiantes.

Fase 4: Analizar y construir

En esta fase el docente presenta la información a ser aprendida comprensivamente por el estudiante, con la ayuda de software informáticos de aplicación matemática como Maple, Cabri, Graphmática, etc.

Organiza el aula para el trabajo de análisis de la información, de manera individual o grupal, ya sea para que elaboren resúmenes u organizadores de información o según la actividad que plantee el docente.

Luego de comprender la nueva información, en el que algunos tópicos incluirán teoremas demostrables o resuelven el problema planteado inicialmente.

Fase 5: Buscar y evaluar

Posteriormente el docente busca, selecciona un teorema significativo del cuerpo teórico presentado a los estudiantes, para que mediante su experiencia oriente los procesos de demostración matemática, luego los estudiantes en equipo realizan una demostración matemática en un nivel de complejidad sencilla.

El docente tiene que ser explícito e indicar que pasos o procedimientos se van a evaluar en una demostración, teniendo en cuenta la operacionalización de la variable demostración matemática de la presente tesis.

El docente verifica el proceso que realizan los estudiantes, grupo por grupo, orientándoles en el proceso, nunca indicándoles explícitamente lo que tiene que llevar cabo.

Luego uno o más grupos exponen el proceso de demostración realizada.

El docente mediante una rúbrica verifica y evalúa el nivel de desarrollo de la capacidad de demostración matemática.

Considerando las fases detalladas en la parte superior surge el nombre PIPAB (Problematizar, Identificar, Probar, Analizar y construir, Buscar y evaluar); realizando la aplicación de manera adecuada permite desarrollar la capacidad de demostración matemática.

4.2.3. DISCUSIÓN DE LOS RESULTADOS DE LA VALIDACIÓN DEL MODELO DIDÁCTICO PIPAB.

El proceso de validación del Modelo se aplicó la técnica de juicio de experto, donde se solicitó mediante documento en el mes de diciembre del 2016 el apoyo para este propósito.(*Anexo 06*)

El Modelo fue revisado por los expertos, realizaron las sugerencias respectivas con la ayuda de la Ficha de expertos (*Anexo 07*).

La pertinencia de la aplicabilidad del MODELO PIPAB se determinó como consecuencia de la validación por juicio de expertos, tres profesionales, docentes, doctores, revisaron exhaustivamente tanto el diagnóstico, los objetivos, el marco teórico como el cuerpo del Modelo para que inicialmente se realicen algunas mejoras; finalmente, los expertos una vez realizado los cambios de acuerdo a sus sugerencias consideraron que el Modelo PIPAB tiene la condición de Aplicable.

CONCLUSIONES

- Se diagnosticó que según las opiniones de los docentes, estos refieren en un 75% que se tiene que trabajar desde los primeros ciclos en el desarrollo de la capacidad de la demostración matemática para formación de los futuros profesionales de la ciencia matemática, asimismo según los resultados de la aplicación del test se obtuvo que el 95% de los estudiantes presentan un nivel de inicio en cuanto al desarrollo de la capacidad de demostración matemática de teoremas relacionados con el Cálculo Diferencial.

- La revisión teórica y su análisis, comprensión y síntesis son procesos cognitivos y epistemológicos para elaborar y plantear propuestas de cambio a fenómenos educativos como es el proceso de aprendizaje y desarrollo de la capacidad de demostración matemática de los estudiantes universitarios del segundo ciclo que llevan el curso de Cálculo Diferencial.

- La validación por Juicio de experto permitió mejorar y perfeccionar la propuesta del Modelo Didáctico PIPAB para desarrollar la capacidad de demostración matemática en el Cálculo Diferencial.

- El Modelo PIPAB con sus fases: Problematizar, Identificar, Probar, Analizar y construir y Buscar y evaluar; como consecuencia de su validación por expertos en docencia y didáctica de la enseñanza y aprendizaje de la matemática se convierte en una propuesta válida para ser aplicado por docentes que requieran mejorar o desarrollar la capacidad de demostración matemática considerando o teniendo en cuenta estas fases didácticas, siempre y cuando estas fases sean aplicadas conscientemente, considerando al estudiante como elemento fundamental de los procesos de aprendizaje.

RECOMENDACIONES

A las autoridades educativas de la Universidad Nacional “Pedro Ruiz Gallo” que verifiquen, monitoreen, evalúen in situ el aprendizaje de la Matemática en general y de las demostraciones matemática en particular, con la finalidad de realizar cambios en la Didáctica de esta área de Educación Superior, de mejorar los procesos de aprendizaje y de enseñanza de estos tópicos matemáticos.

Los docentes a cargo de los cursos de Matemática deben verificar mediante evaluaciones pertinentes el desarrollo del proceso de abstracción que tiene el estudiante de Matemática al ingresar a la Universidad, a partir de esta información realizar acciones inmediatas para mejorar los procesos abstractivos y posteriormente la demostración matemática.

Que los docentes apliquen conscientemente el modelo didáctico PIPAB en las aulas universitarias, modelo que permitirá desarrollar la capacidad demostración matemática en el Cálculo Diferencial.

A los futuros investigadores que presenten expectativas por el desarrollo de la capacidad de demostración matemática, considerar el presente modelo didáctico PIPAB, con la finalidad de poder potenciar u optimizar el desarrollo de mencionada capacidad en los estudiantes universitarios; siendo asimismo materia de estudio en futuras investigaciones.

BIBLIOGRAFÍA

Alcolea, J. (2002). *La Demostración Matemática Problemática Actual*. Descargado de http://www.uma.es/contrastes/pdfs/007/02Jesus_Alcolea.pdf

Ausubel, D. (1983). Aprendizaje significativo. Recuperado de http://delegacion233.bligoo.com.mx/media/users/20/1002571/files/240726/Aprendizaje_significativo.pdf

Bombal, F. (2010). *Rigor y demostración en matemáticas*. Rev.R.Acad.Cienc.Exact.Fís.Nat, 104 (1), 61-79. Descargado de http://www.rac.es/ficheros/doc/00902.pdf

Bravo, L., & Arrieta, J. (s.f.). *Una estrategia didáctica para la enseñanza de las demostraciones geométricas: Resultados de su implementación.* Descargado de http://dialnet.unirioja.es/descarga/articulo/2258643.pdf

Bravo, L., & Arrieta, J. (s.f.). *Algunas Reflexiones sobre las funciones de las Demostraciones en Matemática*. Descargado de rieoei.org/deloslectores/838Bravo.PDF

Budnick, F. (2007). *Matemáticas aplicadas para Administración, Eonomía y Ciencias Sociales.* México, México: Editorial Mc Graw Hill Companies, Inc.

Calvo, C. (2001). *Un estudio sobre el papel de las demostraciones y las demostraciones en cursos preuniversitarios de Cálculo Diferencial e Integral*. (Tesis Doctoral). Universidad Autónoma de Barcelona.España. Descargado de http://www.tdx.cat/bitstream/handle/10803/4689/ccp1de1.pdf

Cornejo, L. (2015). *Análisis Histórico de las demostraciones en libros de texto sobre los Teoremas de Límites y Continuidad. De la Ley General de Educación a la Ley Orgánica de Educación.* (Tesis Doctoral), Universidad de Valladolid. España. Descargado de https://uvadoc.uva.es/bitstream/10324/16309/1/Tesis854-160226.pdf

Crespo, C. (2005). *El papel de las argumentaciones matemáticas en el discurso escolar. La estrategia de deducción por reducción al absurdo*. (Tesis

Magistral). Instituto Politécnico Nacional - México, D. F. Descargado de http://www.matedu.cicata.ipn.mx/tesis/maestria/crespo_2005.pdf

Crespo, C. (2005*). Las figuras de análisis en las demostraciones matemáticas por reducción al absurdo*. Descargado de https://www.researchgate.net/publication/272175415_Las_figuras_de analisis_en_las_demostraciones_matematicas_por_reduccion_al_absurdo

Crespo, C. (2007). *Las argumentaciones matemáticas desde la visión de la socioepistemología.* (Tesis Doctoral). Instituto Politécnico Nacional. México. Descargado de http://www.matedu.cicata.ipn.mx/tesis/doctorado/crespo_2007.pdf

Dos Santos, C., & Ortega, T. (2013). *Perfiles del profesorado sobre la enseñanza y uso de la demostración*. Descargado de www.aiem.es/index.php/aiem/article/download/51/27

Espinoza, M. (2008). Intuicionismo y objetividad. Descargado de http://institucional.us.es/revistas/themata/30/07%20espinoza.pdf

Godino, J. & Recio, A. (s.f.). *Significados institucionales de la demostración. Implicaciones para la educación Matemática*. Descargado de www.raco.cat/index.php/Ensenanza/article/download/21763/21597

Gonzales, J. (2005). Apuntes de Lógica. Razonamiento y demostraciones. Universidad de Cadiz. Descargado de http://www2.uca.es/matematicas/Docencia/ESI/1711051/Apuntes/Leccion3.pdf

Gutiérrez, A. (s.f.). *Aspectos metodológicos de la investigación sobre aprendizaje de la demostración mediante exploraciones con software de Geometría Dinámica*. Descargado de http://www.uv.es/gutierre/archivos1/textospdf/Gut05a.pdf

Hernández, R., Fernández, C., & Baptista, P. (2010). *Metodología de la investigación (*5ª ed.). México D. F.: McGraw – Hill/ Interamericana editores.

Ibañes, M., & Ortega, T. (s.f.). *Un análisis del tratamiento de la demostración matemática en los libros de texto de bachillerato*. Descargado de www.sinewton.org/numeros/numeros/57/Articulo02.pdf

Ibañes, M. (s.f.). *Analizadores específicos para la demostración matemática*. Aplicación a los textos en el tema de trigonometría en bachillerato. Descargado de http://webcache.googleusercontent.com/search?q=cache:Q9FMbNDG51QJ:www.uv.es/aprengeom/archivos2/MartinMurilloF02.pdf+&cd=17&hl=es&ct=clnk&gl=pe

Ibañes, M., & Ortega, T. (s.f.). *Un análisis del tratamiento de la demostración matemática en los libros de texto de Bachillerato*. Descargado de http://webcache.googleusercontent.com/search?q=cache:XFz948FAEo4J:www.sinewton.org/numeros/numeros/57/Articulo02.pdf+&cd=12&hl=es&ct=clnk&gl=peEn

Macías, D., Nápoles, J., Caputo, S., Acosta, J., Espinoza, R., et al. (s.f*). La enseñanza de la demostración matemática parte 3 del diagnóstico de la situación actual: Análisis de las concepciones de los docentes de Matemática sobre la demostración de proposiciones y su enseñanza. Descargado de* http://www.unne.edu.ar/unnevieja/Web/cyt/cyt/2002/09-Educacion/D-021.pdf

Macías, D., Nápoles, J., Caputo, S., Acosta, J., Espinoza, R., et al. (s.f). *La enseñanza de la demostración matemática.* Descargado de http://www.unne.edu.ar/unnevieja/Web/cyt/cyt/2001/9-Educacion/D-021.pdf

Martín, J., Murillo, J. & Fortuny, J. (s.f.). El aprendizaje colaborativo y la demostración matemática. Descargado de http://webcache.googleusercontent.com/search?q=cache:Q9FMbNDG51QJ:www.uv.es/aprengeom/archivos2/MartinMurilloF02.pdf+&cd=17&hl=es&ct=clnk&gl=pe

MED (2012). PISA en el Perú. *Informe pedagógico de resultados PISA 2012.* Descargado de http://www.grade.org.pe/forge/descargas/Informe_%20Matematica_PISA2012.pdf

Meurillo, J. & Fortuny, J. (s.f.). *El Aprendizaje Colaborativo y la Demostración Matemática.* Descargado de http://www.uv.es/aprengeom/archivos2/MartinMurilloF02.pdf

Morales, C. (2008). *Los Métodos de Demostración en Matemática.* (Tesis Magistral). Universidad de San Carlos. Guatemala. Descargado de https://albeniz-1-2-matematicas.wikispaces.com/file/view/07_1914.pdf

Moreno, A. (s.f.). *Una perspectiva sobre la demostración*. Descargado de http://www.redalyc.org/pdf/140/14000109.pdf

Papalia, D., Wendkos, S. & Duskin, R. (1998). *Psicología del desarrollo* (8ª.ed.). Bogotá: McGraw-HILL Interamericana.

Perez, J. (2010). Las demostraciones en Matemáticas. Descargado de https://seccionbilinguezilina.wikispaces.com/file/view/03.Demostraciones.pdf

Red Eurydice (2012). Agencia Ejecutiva en el ámbito Educativo, Audiovisual y Cultural (EACEA P9 Eurydice). *La enseñanza de las matemáticas en Europa: Retos comunes y políticas nacionales*. Descargado de http://eacea.ec.europa.eu/education/eurydice./documents/thematic_reports/132ES.pdf

Ruiz, A. (1990). Matemática y Filosofía. Estudios logicistas. Costa Rica. Editorial de la Universidad de Costa Rica.

Ruiz, A. (1998). *Historia y filosofía de las Matemáticas*. Descargado de http://www.centroedumatematica.com/aruiz/libros/Historia%20y%20filosofia%20de%20las%20matematicas.pdf

Ruiz, J. (s.f). *Problemas actuales de la enseñanza aprendizaje de la matemática*. Universidad de Camagüey. Cuba. Descargado de file:///C:/Users/Jorge_/Downloads/2359Socarras-Maq.pdf

Sáenz, C. (2001). Sobre Conjeturas y demostraciones en la Enseñanza de las Matemáticas. Quinto simposio de la sociedad española de investigación en educación matemática. Universidad Autónoma de Madrid. Descargado de https://documat.unirioja.es/descarga/articulo/617798.pdf

Sánchez, E. (2014). *Iniciación a la demostración matemática en estudiantes de educación secundaria obligatoria y su incidencia en la resolución de problemas. Un ejemplo de aplicación en la comunidad de Madrid*. (Tesis Doctoral). Universidad Nacional de Educación a Distancia. España Descargado de http://e-spacio.uned.es/fez/eserv/tesisuned:Educacion-Esanchez/Documento.pdf

Smith, E. & Kosslyn, S. (2008). *Procesos Cognitivos: modelos y bases neurales*. Madrid: Pearson Educación.

Solow, D. (1993). Cómo entender y hacer demostraciones en Matemáticas. Artículo. Descargado de http://es.slideshare.net/YoshimarSantana/como-entender-y-hacer-demostraciones-en-matemticas-daniel-solow

UDEA (s.f). Para ser, saber y saber hacer. Universidad de Antioquía. Descargado de docplayer.es/21264081-Capitulo-1-algunos-metodos-de-demostracion-modulo-1-historia-de-la-geometria-modulo-2-la-demostracion-modulo-3-leyes.html

Valderrama, S. (2015). *Pasos para elaborar proyectos de investigación científica*. Lima: Editorial San Marcos.

Vega, L. (s.f.). *Sobre la invención griega de la idea de demostración*. Descargado de https://dialnet.unirioja.es/descarga/articulo/62023.pdf

ANEXOS

Anexo 01

Guía de entrevista

Nombre del Profesor:

Grado Académico:

Centro de Trabajo:

Asignatura(s) que enseña en la carrera de matemática:

Ciclo de estudios:

Instrucciones: Estimado(a) profesor(a) pido su apoyo respondiendo las siguientes preguntas que será de valiosa ayuda para un trabajo de investigación que vengo realizando sobre la demostración matemática en estudiantes de la carrera de Matemática.

1) ¿Qué piensa sobre la capacidad demostrativa en los estudiantes de Matemática?

2) ¿Por qué cree que es importante el desarrollo de esta capacidad en los estudiantes de Matemática?

3) ¿Cómo ve a sus estudiantes con respecto al desarrollo de esta capacidad?

4) ¿Conoce algún trabajo de investigación que haya evaluado la capacidad de demostración matemática en los estudiantes de Matemática de la UNPRG o en otro lugar?

5) ¿Cree que los estudiantes de Matemática deben ser evaluados en la capacidad de demostración matemática? ¿Por qué?

Gracias.

Anexo 02
Docentes expertos para validación

MODELO DIDÁCTICO PIPAB PARA DESARROLLAR LA CAPACIDAD DE LA DEMOSTRACIÓN MATEMÁTICA EN EL CÁLCULO DIFERENCIAL EN LOS ESTUDIANTES DE MATEMÁTICA DE LA UNIVERSIDAD NACIONAL PEDRO RUIZ GALLO DE LA REGIÓN LAMBAYEQUE - 2016.

Objetivo general:

Proponer un modelo didáctico para desarrollar la capacidad de la demostración matemática en el cálculo diferencial en los estudiantes de Matemática de la Universidad Nacional Pedro Ruiz Gallo.

Objetivo específico N° 01:

Diagnosticar cuál es la capacidad de los estudiantes respecto de las demostraciones matemáticas en cálculo diferencial que realizan los estudiantes del segundo ciclo de la carrera profesional de Matemática de la Universidad Nacional Pedro Ruiz Gallo.

RELACIÓN DE EXPERTOS

N°	APELLIDOS Y NOMBRES	GRADO ACADÉMICO	ESPECIALIDAD	CENTRO DE TRABAJO	CARGO
1	Hananel Baigorria Alberto	Doctor	Matemáticas	USAT	Profesor
2	Vigo Vargas Olinda Luzmila	Doctora	Educación	UNPRG	Profesora
3	Collantes Santisteban, Luis Jaime.	Doctor	Matemáticas	UNPRG	Profesor

Anexo 03

Validación de expertos de test para evaluar la demostración matemática

ESCUELA DE POSTGRADO
UNIVERSIDAD CÉSAR VALLEJO

Anexo 003

FICHA DE EVALUACIÓN DE EXPERTOS

Estimado profesional:

Dr. Hananel Baigorria, Alberto

Agradezco infinitamente su participación en el proceso de evaluación del instrumento de recolección de información referido al desarrollo de capacidades de demostración matemática de los estudiantes de la carrera profesional de **Matemática de la Universidad Nacional "Pedro Ruiz Gallo"**.

El presente formato (Anexo 003) servirá para que usted, como profesional con suma experticia pueda realizar las recomendaciones al instrumento de recojo de información del Anexo 004.

El siguiente y último paso consistirá en que usted estimado(a) docente lea las veces que sean necesarias cada ítem planteado en la Test (Anexo 004) y luego **de marcas con un "SÍ" o con un "NO" haciendo las respectivas observaciones** o anotaciones que permitan mejorar la construcción del mencionado instrumentos de recolección de datos.

RESULTADOS DE LA EVALUACIÓN DEL TEST (Ver anexo 04)

N° de ítem	Validez de contenido		Validez de criterio		Validez de constructo		OBSERVACIONES/ SUGERENCIAS
	El ítem corresponde al objeto de investigación: demostraciones matemáticas		El ítem permite determinar la capacidad de demostración matemática de un estudiante.		El ítem se relaciona con un marco teórico referido a las demostraciones matemáticas		
	Sí	No	Sí	No	Sí	No	
01	✓		✓		✓		
02	✓		✓		✓		
03	✓		✓		✓		
04	✓		✓		✓		

FIRMA

42222346

ESCUELA DE POSTGRADO
UNIVERSIDAD CÉSAR VALLEJO

FICHA DE EVALUACIÓN DE EXPERTOS

Estimado profesional:

Dra. Vigo Vargas, Olinda Luzmila

Agradezco infinitamente su participación en el proceso de evaluación del instrumento de recolección de información referido al desarrollo de capacidades de demostración matemática de los estudiantes de la carrera profesional de Matemática de la Universidad Nacional "Pedro Ruiz Gallo".

El presente formato (Anexo 003) servirá para que usted, como profesional con suma experticia pueda realizar las recomendaciones al instrumento de recojo de información del Anexo 004.

El siguiente y último paso consistirá en que usted estimado(a) docente lea las veces que sean necesarias cada ítem planteado en la Test (Anexo 004) y luego de marcas con un "SÍ" o con un "NO" **haciendo las respectivas observaciones** o anotaciones que permitan mejorar la construcción del mencionado instrumentos de recolección de datos.

RESULTADOS DE LA EVALUACIÓN DEL TEST (Ver anexo 04)

N° de ítem	Validez de contenido		Validez de criterio		Validez de constructo		OBSERVACIONES/ SUGERENCIAS
	El ítem corresponde al objeto de investigación: demostraciones matemáticas		El ítem permite determinar la capacidad de demostración matemática de un estudiante.		El ítem se relaciona con un marco teórico referido a las demostraciones matemáticas		
	Sí	No	Sí	No	Sí	No	
01	✓		✓		✓		
02	✓		✓		✓		
03	✓		✓		✓		
04	✓		✓		✓		

OVigoV

FIRMA

ESCUELA DE POSTGRADO
UNIVERSIDAD CÉSAR VALLEJO

Anexo 003

FICHA DE EVALUACIÓN DE EXPERTOS

Estimado profesional:

Dr. Collantes Santisteban Luis Jaime

Agradezco infinitamente su participación en el proceso de evaluación del instrumento de recolección de información referido al desarrollo de capacidades de demostración matemática de los estudiantes de la carrera profesional de Matemática de la Universidad Nacional "Pedro Ruiz Gallo".

El presente formato (Anexo 003) servirá para que usted, como profesional con suma experticia pueda realizar las recomendaciones al instrumento de recojo de información del Anexo 004.

El siguiente y último paso consistirá en que usted estimado(a) docente lea las veces que sean necesarias cada ítem planteado en la Test (Anexo 004) y luego de marcas con un "SÍ" o con un "NO" haciendo las respectivas observaciones o anotaciones que permitan mejorar la construcción del mencionado instrumentos de recolección de datos.

RESULTADOS DE LA EVALUACIÓN DEL TEST (Ver anexo 04)

N° de ítem	Validez de contenido		Validez de criterio		Validez de constructo		OBSERVACIONES/ SUGERENCIAS
	El ítem corresponde al objeto de investigación: demostraciones matemáticas		El ítem permite determinar la capacidad de demostración matemática de un estudiante.		El ítem se relaciona con un marco teórico referido a las demostraciones matemáticas		
	Sí	No	Sí	No	Sí	No	
01	✓		✓		✓		
02	✓		✓		✓		
03	✓		✓		✓		
04	✓		✓		✓		

Anexo 04

TEST DE EVALUACIÓN DE LA CAPACIDAD DEMOSTRACIÓN MATEMÁTICA

	Fecha:	

Universidad:		
Región:		
Curso/asignatura		
Ciclo:		
Datos del estudiante		
APELLIDOS PATERNO	**APELLIDO MATERNO**	**NOMBRES**

INSTRUCCIONES

Estimado estudiante:

A continuación encontrarás cuatro (04) retos matemáticos, los cuales se te pide responder de acuerdo a las INDICACIONES, en un máximo de 45 minutos.

Previamente te solicitamos leer y cumplir con lo siguiente:

- Apaga tu celular o ponlo en modo “vibrar” y luego guárdalo.
- Evita salir del aula una vez iniciada la presente evaluación.
- Desarrolla la evaluación en completo silencio.
- Responde correctamente los cuatro (4) retos o los que puedas, con lapicero negro o azul.

Los resultados obtenidos permitirán presentar propuestas metodológicas para mejorar el desarrollo de la capacidad de demostración matemática.

Muchas gracias por tu colaboración

INDICACIONES

En cada caso:

i. Escriba clara y completamente la hipótesis y la tesis
ii. Justifique cada una de las afirmaciones o negaciones que realice indicando a la derecha la definición , teorema, ley o propiedad aplicada
iii. Especifique la conclusión aceptando o contradiciendo la hipótesis

CASOS A DEMOSTRAR

1. Demuestre aplicando la definición de límite que si existen $\lim_{x \to a} f(x)$ y $\lim_{x \to a} g(x)$, entonces: $\lim_{x \to a} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x)$

2. Demuestre que:

   Si f es una función continua en el intervalo $[a,b]$, derivable en $\langle a,b \rangle$, entonces $\exists\, c \in \langle a,b \rangle$, tal que $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$

3. Si las funciones $f(x)$ y $g(x)$ son derivables en todo su dominio. Se sabe que $y = f(x) + g(x)$, demuestre que: $\frac{d}{d} = f'(x) + g'(x)$

4. Sea $y = x^n$ es una función derivable en su dominio, demuestre aplicando límite cuando $\Delta x \to 0$, que $\frac{d}{d} = nx^{n-1}$.

Anexo 05

RÚBRICA DE EVALUACIÓN DIAGNÓSTICA PARA LA CAPACIDAD DEMOSTRACIÓN MATEMÁTICA

CRITERIOS / PROCESO	EXCELENTE (1,0)	BUENO (0,5)	REGULAR (0,2)	DEFICIENTE (0,0)
1. Identificación de la hipótesis (IH)	Escribe con claridad la hipótesis.	Escribe la hipótesis, pero no es clara ni completamente estructurada.	Existen elementos de la hipótesis, pero no se presenta estructurada ni delineada.	No se presentan elementos de la hipótesis.
2. Identificación de la tesis (IT)	Escribe con claridad la tesis.	Escribe la tesis, pero no es clara ni completamente estructurada.	Existen elementos de la tesis, pero no se presenta estructurada ni delineada.	No se presentan elementos de la tesis.
3. Planteamiento (Pl)	Utiliza adecuadamente la definición o el concepto matemático para la demostración.	Utiliza pero con error mínimo la definición o el concepto matemático para la demostración.	Utiliza pero con error excesivo la definición o el concepto matemático para la demostración.	No utiliza la definición o el concepto matemático para la demostración.
4. Procedimiento (Pr)	El procedimiento está estructurado con pasos claros, son secuenciales y justificados mediante oraciones completas, según un método elegido.	El procedimiento está estructurado con algunos pasos claros, son secuenciales y justificados mediante oraciones completas, según un método elegido.	El procedimiento presenta pocos pasos e incompletos o poco claros, según un método elegido.	El procedimiento no presenta pasos claros a seguir.
5. Conclusión (C)	Se expresa claramente, a través de una oración, la aceptación o el rechazo de la hipótesis	Se expresa, , a través de una oración, la aceptación o rechazo de la hipótesis de forma poco precisa, pero congruente.	Se expresa, a través de una oración., pero de forma confusa la aceptación o rechazo de la hipótesis.	No se evidencia una conclusión.

Anexo 06
Cartas dirigidas a expertos para validar el Modelo PIPAB

Chiclayo, diciembre del 2016

Señor(a): Dr. Hananel Baigorria Alberto

Docente de la Universidad...

Presente

De mi mayor consideración

Me es grato dirigirme a su persona con la finalidad de saludarlo atentamente, al mismo tiempo hacer de su conocimiento que, como estudiante de la Escuela de Post Grado de la Universidad César Vallejo – Pimentel - Chiclayo, estoy desarrollando la tesis denominada MODELO DIDÁCTICO PIPAB PARA DESARROLLAR LA CAPACIDAD DEMOSTRACIÓN MATEMÁTICA DE LOS ESTUDIANTES UNIVERSITARIOS EN EL CÁLCULO DIFERENCIAL, para optar el grado académico de Doctor en Educación. Por esta razón, conocedor de su alto nivel profesional y académico, acudo a usted para que tenga la amabilidad de - luego de leer exhaustivamente la tesis antes mencionada, aplicando la técnica de Juicio de expertos - realizar la Validación del siguiente documento:

MODELO DIDÁCTICO PIPAB PARA DESARROLLAR LA CAPACIDAD DEMOSTRACIÓN MATEMÁTICA DE LOS ESTUDIANTES UNIVERSITARIOS EN EL CÁLCULO DIFERENCIAL.

Con tal propósito le estoy adjuntando mi Informe de Tesis, en el que se ubica el Modelo antes mencionado.

Finalmente, le expreso mi profundo agradecimiento por apoyo y sugerencias que usted considere realizar con la finalidad de mejorar el presente trabajo de investigación.

Atentamente,

Recibido
15/12/16

Dr. Hananel

Mg. Rony Rafael García Apéstegui.
DNI N° 42330714

Señor(a): Dr. Vigo Vargas Olinda Luzmila

Docente de la Universidad...

Presente

De mi mayor consideración

Me es grato dirigirme a su persona con la finalidad de saludarlo atentamente, al mismo tiempo hacer de su conocimiento que, como estudiante de la Escuela de Post Grado de la Universidad César Vallejo – Pimentel - Chiclayo, estoy desarrollando la tesis denominada MODELO DIDÁCTICO PIPAB PARA DESARROLLAR LA CAPACIDAD DEMOSTRACIÓN MATEMÁTICA DE LOS ESTUDIANTES UNIVERSITARIOS EN EL CÁLCULO DIFERENCIAL, para optar el grado académico de Doctor en Educación. Por esta razón, conocedor de su alto nivel profesional y académico, acudo a usted para que tenga la amabilidad de - luego de leer exhaustivamente la tesis antes mencionada, aplicando la técnica de Juicio de expertos - realizar la Validación del siguiente documento:

MODELO DIDÁCTICO PIPAB PARA DESARROLLAR LA CAPACIDAD DEMOSTRACIÓN MATEMÁTICA DE LOS ESTUDIANTES UNIVERSITARIOS EN EL CÁLCULO DIFERENCIAL.

Con tal propósito le estoy adjuntando mi Informe de Tesis, en el que se ubica el Modelo antes mencionado.

Finalmente, le expreso mi profundo agradecimiento por apoyo y sugerencias que usted considere realizar con la finalidad de mejorar el presente trabajo de investigación.

Atentamente,

16/12/2016

Mg. Rony Rafael García Apéstegui.
DNI N° 42330714

Señor(a): Dr. Collantes Santisteban Luis Jaime

Docente de la Universidad...

Presente

De mi mayor consideración

Me es grato dirigirme a su persona con la finalidad de saludarlo atentamente, al mismo tiempo hacer de su conocimiento que, como estudiante de la Escuela de Post Grado de la Universidad César Vallejo – Pimentel - Chiclayo, estoy desarrollando la tesis denominada MODELO DIDÁCTICO PIPAB PARA DESARROLLAR LA CAPACIDAD DEMOSTRACIÓN MATEMÁTICA DE LOS ESTUDIANTES UNIVERSITARIOS EN EL CÁLCULO DIFERENCIAL, para optar el grado académico de Doctor en Educación. Por esta razón, conocedor de su alto nivel profesional y académico, acudo a usted para que tenga la amabilidad de - luego de leer exhaustivamente la tesis antes mencionada, aplicando la técnica de Juicio de expertos - realizar la Validación del siguiente documento:

MODELO DIDÁCTICO PIPAB PARA DESARROLLAR LA CAPACIDAD DEMOSTRACIÓN MATEMÁTICA DE LOS ESTUDIANTES UNIVERSITARIOS EN EL CÁLCULO DIFERENCIAL.

Con tal propósito le estoy adjuntando mi Informe de Tesis, en el que se ubica el Modelo antes mencionado.

Finalmente, le expreso mi profundo agradecimiento por apoyo y sugerencias que usted considere realizar con la finalidad de mejorar el presente trabajo de investigación.

Atentamente,

Recibido 16/12/2016

Mg. Rony Rafael García Apéstegui.
DNI N° 42330714

Anexo 07

Fichas de validación del modelo PIPAB dirigidas a expertos

ESCUELA DE POSGRADO

UNIVERSIDAD CÉSAR VALLEJO

FICHA DE VALIDACIÓN DEL MODELO

1. Nombre del Modelo: MODELO DIDÁCTICO PIPAB PARA DESARROLLAR LA CAPACIDAD DEMOSTRACIÓN MATEMÁTICA DE LOS ESTUDIANTES UNIVERSITARIOS EN EL CÁLCULO DIFERENCIAL.

2. Autor: Mg. Rony Rafael García Apéstegui.

3. Datos del profesional experto:

Apellidos y nombres: Hananel Baigorria, Alberto

Grado Académico: Post Doctor / Ph.D. / Doctor en Matemáticas

Centro(s) laboral(es): Universidad Católica Santo Toribio de Mogrovejo - USAT Chiclayo.

4. INSTRUCCIONES:

Marque con un aspa debajo de cada número y de ser necesario realice las observaciones o sugerencias al Modelo presentado en la Tesis adjunta.

INDICADOR DE CALIDAD DEL MODELO "PIPAB"	VALORACIÓN DEL INDICADOR					OBSERVACIONES/SUGERENCIAS
	1	2	3	4	5	
BASES TEÓRICAS						
1. Las teorías planteadas en la tesis son suficientes para realizar propuestas de demostración matemática.			X			
2. El análisis de la teoría es exhaustivo y profundo, para que en el Modelo PIPAB se realicen planteamientos de demostración matemática.				X		
3. Las propuestas de cambio que se plantean en el Modelo PIPAB son producto y consecuencia del análisis exhaustivo de las teorías que se analizan en la tesis.					X	
4. Las teorías sustentan o fundamentan las propuestas de demostración matemática en el Cálculo Diferencial.				X		
OBJETIVO						
5. El objetivo está diseñado de tal manera que resume lo que se desea lograr en la propuesta.				X		
6. El objetivo del modelo PIPAB es posible de ser logrado.				X		
7. El Modelo promueve la mejora en los procesos de demostración matemática en la asignatura Cálculo Diferencial.					X	
CONTENIDO Y CALIDAD TÉCNICA DEL MODELO						
8. Se observa la justificación del Modelo					X	

de Evaluación PIPAB.						
9. La justificación está redactada desde el punto de vista teórico, práctico y metodológico.	1	2	3 X	4	5	
10. Se menciona en el modelo PIPAB si éste coadyuva en el incremento de la teoría de demostración matemática en el Cálculo Diferencial.	1	2	3	4	5 X	
11. Se indica en la justificación para qué y a quienes servirá el Modelo PIPAB.	1	2	3	4	5 X	
12. Se indica en la justificación si metodológicamente es aplicable el Modelo PIPAB para mejorar las demostraciones matemáticas de los estudiantes universitarios.	1	2	3	4	5 X	
13. En el modelo PIPAB se plantean pasos o procedimientos para desarrollar la capacidad de demostración matemática.	1	2	3 X	4	5	
14. En el modelo PIPAB se plantean estrategias de demostración matemática de los estudiantes universitarios, en la asignatura de Cálculo Diferencial.	1	2	3	4	5 X	
15. En el modelo PIPAB se proponen procesos didácticos para desarrollar la capacidad de demostración matemática en los estudiantes universitarios, en la asignatura de Cálculo Diferencial.	1	2	3	4	5 X	
VIABILIDAD						
16. Los procesos didácticos propuestos son posibles de aplicar y utilizar por cualquier docente que tenga a cargo la asignatura de Cálculo Diferencial.	1	2	3	4	5 X	
COHERENCIA						
17. Los elementos conformantes del modelo PIPAB se interrelacionan lógicamente y en conjunto forman un cuerpo teórico, práctico y metodológico.	1	2	3	4	5 X	
18. El Modelo PIPAB tiene pasos secuenciales que lógicamente se interrelacionan.	1	2	3	4	5 X	
EVALUACIÓN						
19. El Modelo PIPAB brinda posibilidades a cualquier docente de la asignatura Cálculo Diferencial de	1	2	3	4	5 X	

evaluar las demostraciones matemáticas en las aulas universitarias.						
20. Los pasos a seguir en el Modelo permite que el docente evalúe sus procedimientos didácticos en el aula de clase.	1	2	3 X	4	5	

5. Escala de valoración:

Categorías	Escala	Descripción
Muy malo	1 - 20	El modelo NO es aplicable
Malo	21 - 54	El Modelo No es aplicable
Regular	55-65	Deben levantarse las observaciones, correcciones o sugerencias para su aplicabilidad.
Bueno	66-85	El Modelo es aplicable, pero requiere modificaciones.
Muy bueno.	86-100	El Modelo es aplicable

6. Observaciones, sugerencias: Como observación únicamente la capacidad de demostración en Matemática en algunos estudiantes excepcionalmente inteligentes con coeficiente mayor a 140 no puede ser tan fácil medida con dichos tests, por ejemplo los aspergers o esquizofrenia. Se sugiere contrastar con otra metodología

7. Resultado de la evaluación

PUNTAJE FINAL OBTENIDO 88 puntos.

SU PROPUESTA DE MODELO "PIPAB" es: aplicable

FIRMA

Apellidos y nombres: Hananel Baigorria, Alberto

DNI N°: 42222345

ESCUELA DE POSGRADO
UNIVERSIDAD CÉSAR VALLEJO

FICHA DE VALIDACIÓN DEL MODELO

1. Nombre del Modelo: MODELO DIDÁCTICO PIPAB PARA DESARROLLAR LA CAPACIDAD DEMOSTRACIÓN MATEMÁTICA DE LOS ESTUDIANTES UNIVERSITARIOS EN EL CÁLCULO DIFERENCIAL.

2. Autor: Mg. Rony Rafael García Apéstegui.

3. Datos del profesional experto:
Apellidos y nombres: VIGO VARGAS OLINDA LUZMILA
Grado Académico: DOCTORA EN CIENCIAS DE LA EDUCACION
Centro(s) laboral(es): UNIVERSIDAD NAC. PEDRO RUIZ GALLO

4. INSTRUCCIONES:

Marque con un aspa debajo de cada número y de ser necesario realice las observaciones o sugerencias al Modelo presentado en la Tesis adjunta.

INDICADOR DE CALIDAD DEL MODELO "PIPAB"	VALORACIÓN DEL INDICADOR					OBSERVACIONES/SUGERENCIAS
BASES TEÓRICAS						
1. Las teorías planteadas en la tesis son suficientes para realizar propuestas de demostración matemática.	1	2	3	4	5 X	
2. El análisis de la teoría es exhaustivo y profundo, para que en el Modelo PIPAB se realicen planteamientos de demostración matemática.	1	2	3	4	5 X	
3. Las propuestas de cambio que se plantean en el Modelo PIPAB son producto y consecuencia del análisis exhaustivo de las teorías que se analizan en la tesis.	1	2	3	4	5 X	
4. Las teorías sustentan o fundamentan las propuestas de demostración matemática en el Cálculo Diferencial.	1	2	3	4	5 X	
OBJETIVO						
5. El objetivo está diseñado de tal manera que resume lo que se desea lograr en la propuesta.	1	2	3	4	5 X	
6. El objetivo del modelo PIPAB es posible de ser logrado.	1	2	3	4	5 X	
7. El Modelo promueve la mejora en los procesos de demostración matemática en la asignatura Cálculo Diferencial.	1	2	3	4	5 X	
CONTENIDO Y CALIDAD TÉCNICA DEL MODELO						
8. Se observa la justificación del Modelo	1	2	3	4	5 X	

de Evaluación PIPAB.						
9. La justificación está redactada desde el punto de vista teórico, práctico y metodológico.	1	2	3	4	5 X	
10. Se menciona en el modelo PIPAB si éste coadyuva en el incremento de la teoría de demostración matemática en el Cálculo Diferencial.	1	2	3	4	5 X	
11. Se indica en la justificación para qué y a quienes servirá el Modelo PIPAB.	1	2	3	4	5 X	
12. Se indica en la justificación si metodológicamente es aplicable el Modelo PIPAB para mejorar las demostraciones matemáticas de los estudiantes universitarios.	1	2	3	4	5 X	
13. En el modelo PIPAB se plantean pasos o procedimientos para desarrollar la capacidad de demostración matemática.	1	2	3	4	5 X	
14. En el modelo PIPAB se plantean estrategias de demostración matemática de los estudiantes universitarios, en la asignatura de Cálculo Diferencial.	1	2	3	4	5 X	
15. En el modelo PIPAB se proponen procesos didácticos para desarrollar la capacidad de demostración matemática en los estudiantes universitarios, en la asignatura de Cálculo Diferencial.	1	2	3	4	5 X	
VIABILIDAD						
16. Los procesos didácticos propuestos son posibles de aplicar y utilizar por cualquier docente que tenga a cargo la asignatura de Cálculo Diferencial.	1	2	3	4	5 X	
COHERENCIA						
17. Los elementos conformantes del modelo PIPAB se interrelacionan lógicamente y en conjunto forman un cuerpo teórico, práctico y metodológico.	1	2	3	4	5 X	
18. El Modelo PIPAB tiene pasos secuenciales que lógicamente se interrelacionan.	1	2	3	4	5 X	
EVALUACIÓN						
19. El Modelo PIPAB brinda posibilidades a cualquier docente de la asignatura Cálculo Diferencial de	1	2	3	4	5 X	

evaluar las demostraciones matemáticas en las aulas universitarias.						
20. Los pasos a seguir en el Modelo permite que el docente evalúe sus procedimientos didácticos en el aula de clase.	1	2	3	4	5 X	

5. Escala de valoración:

Categorías	Escala	Descripción
Muy malo	1 - 20	El modelo NO es aplicable
Malo	21 - 54	El Modelo No es aplicable
Regular	55-65	Deben levantarse las observaciones, correcciones o sugerencias para su aplicabilidad.
Bueno	66-85	El Modelo es aplicable, pero requiere modificaciones.
Muy bueno.	86-100	El Modelo es aplicable

6. Observaciones, sugerencias:

----

7. Resultado de la evaluación

PUNTAJE FINAL OBTENIDO 100 puntos.

SU PROPUESTA DE MODELO "PIPAB" es: Aplicable

FIRMA

Apellidos y nombres: VIGO VARGAS OLINDA LUZMILA

DNI N°: 16739789

ESCUELA DE POSGRADO
UNIVERSIDAD CÉSAR VALLEJO

FICHA DE VALIDACIÓN DEL MODELO

1. Nombre del Modelo: MODELO DIDÁCTICO PIPAB PARA DESARROLLAR LA CAPACIDAD DEMOSTRACIÓN MATEMÁTICA DE LOS ESTUDIANTES UNIVERSITARIOS EN EL CÁLCULO DIFERENCIAL.

2. Autor: Mg. Rony Rafael García Apéstegui.

3. Datos del profesional experto:
Apellidos y nombres: Collantes Santisteban Luis Jaime
Grado Académico: Doctor en Ciencias Aplicadas c/m Ing. Matemática
Centro(s) laboral(es): Universidad Nacional Pedro Ruiz Gallo

4. INSTRUCCIONES:

Marque con un aspa debajo de cada número y de ser necesario realice las observaciones o sugerencias al Modelo presentado en la Tesis adjunta.

INDICADOR DE CALIDAD DEL MODELO "PIPAB"	VALORACIÓN DEL INDICADOR					OBSERVACIONES/SUGERENCIAS
BASES TEÓRICAS						
	1	2	3	4	5	
1. Las teorías planteadas en la tesis son suficientes para realizar propuestas de demostración matemática.					X	
2. El análisis de la teoría es exhaustivo y profundo, para que en el Modelo PIPAB se realicen planteamientos de demostración matemática.					X	
3. Las propuestas de cambio que se plantean en el Modelo PIPAB son producto y consecuencia del análisis exhaustivo de las teorías que se analizan en la tesis.					X	
4. Las teorías sustentan o fundamentan las propuestas de demostración matemática en el Cálculo Diferencial.					X	
OBJETIVO						
5. El objetivo está diseñado de tal manera que resume lo que se desea lograr en la propuesta.					X	
6. El objetivo del modelo PIPAB es posible de ser logrado.					X	
7. El Modelo promueve la mejora en los procesos de demostración matemática en la asignatura Cálculo Diferencial.					X	
CONTENIDO Y CALIDAD TÉCNICA DEL MODELO						
8. Se observa la justificación del Modelo					X	

de Evaluación PIPAB.						
9. La justificación está redactada desde el punto de vista teórico, práctico y metodológico.	1	2	3	4	5 X	
10. Se menciona en el modelo PIPAB si éste coadyuva en el incremento de la teoría de demostración matemática en el Cálculo Diferencial.	1	2	3	4	5 X	
11. Se indica en la justificación para qué y a quienes servirá el Modelo PIPAB.	1	2	3	4	5 X	
12. Se indica en la justificación si metodológicamente es aplicable el Modelo PIPAB para mejorar las demostraciones matemáticas de los estudiantes universitarios.	1	2	3	4	5 X	
13. En el modelo PIPAB se plantean pasos o procedimientos para desarrollar la capacidad de demostración matemática.	1	2	3	4	5 X	
14. En el modelo PIPAB se plantean estrategias de demostración matemática de los estudiantes universitarios, en la asignatura de Cálculo Diferencial.	1	2	3	4	5 X	
15. En el modelo PIPAB se proponen procesos didácticos para desarrollar la capacidad de demostración matemática en los estudiantes universitarios, en la asignatura de Cálculo Diferencial.	1	2	3	4	5 X	
VIABILIDAD						
16. Los procesos didácticos propuestos son posibles de aplicar y utilizar por cualquier docente que tenga a cargo la asignatura de Cálculo Diferencial.	1	2	3	4	5 X	
COHERENCIA						
17. Los elementos conformantes del modelo PIPAB se interrelacionan lógicamente y en conjunto forman un cuerpo teórico, práctico y metodológico.	1	2	3	4	5 X	
18. El Modelo PIPAB tiene pasos secuenciales que lógicamente se interrelacionan.	1	2	3	4	5 X	
EVALUACIÓN						
19. El Modelo PIPAB brinda posibilidades a cualquier docente de la asignatura Cálculo Diferencial de	1	2	3	4	5 X	

evaluar las demostraciones matemáticas en las aulas universitarias.						
20. Los pasos a seguir en el Modelo permite que el docente evalúe sus procedimientos didácticos en el aula de clase.	1	2	3	4 X	5	

5. Escala de valoración:

Categorías	Escala	Descripción
Muy malo	1 - 20	El modelo NO es aplicable
Malo	21 - 54	El Modelo No es aplicable
Regular	55-65	Deben levantarse las observaciones, correcciones o sugerencias para su aplicabilidad.
Bueno	66-85	El Modelo es aplicable, pero requiere modificaciones.
Muy bueno.	86-100	El Modelo es aplicable

6. Observaciones, sugerencias:

----

7. Resultado de la evaluación

PUNTAJE FINAL OBTENIDO 99 puntos.

SU PROPUESTA DE MODELO "PIPAB" es: APLICABLE

FIRMA

Apellidos y nombres: Collantes Santisteban Luis Jaime

DNI N°: 16654135

FOTOS